

Más allá de la Binomial

Tiempos de Espera y el Universo Sin Reemplazo



Lo Conocido

Distribución Binomial:
Intentos fijos
predeterminados (n).

Distribución de Poisson:
Tasas constantes en el
tiempo/espacio (λ).

El Primer Éxito (Geométrica).

La matemática de la
persistencia.

La Nueva Frontera

El Universo Sin Reemplazo (Hipergeométrica)

Cuando nuestras acciones alteran
el entorno permanentemente.

La Distribución Geométrica: En Búsqueda del Primer Éxito

A diferencia de la Binomial, aquí no fijamos de antemano el número de intentos.
Jugamos hasta que nos salga bien por primera vez.



¿Cuántas veces tengo que intentar una acción de forma independiente hasta lograr mi primer éxito?

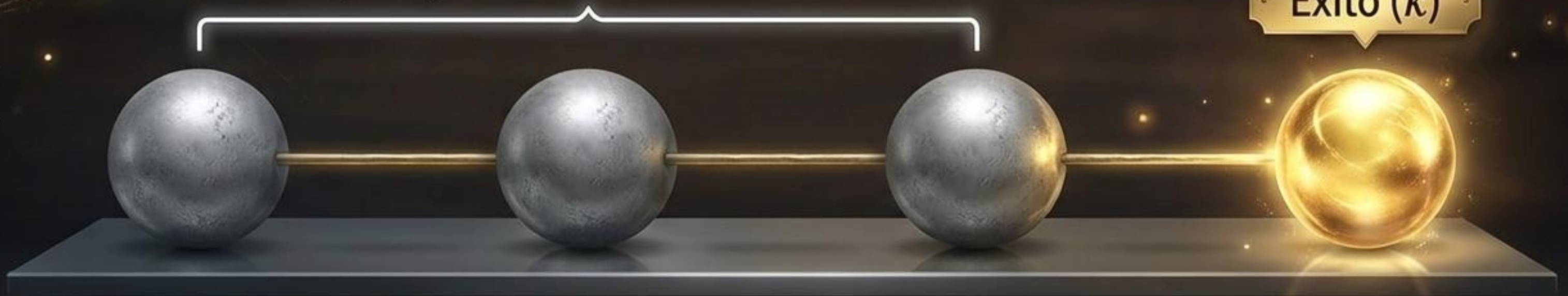
X = El número total de intentos hasta el triunfo.

p = La probabilidad constante de éxito en cada ensayo.

Anatomía de la Espera

$(k-1)$ Fracazos Acumulados

Éxito (k)



$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} * p$$

$(1 - p)^{k-1}$: **Operador Exponencial.**
La probabilidad de fracasar repetidamente
en los primeros $(k-1)$ intentos.

p : **El triunfo final.**
La probabilidad de tener éxito
exactamente en el intento número k .

La Filosofía de la Amnesia

Pasado: 10 fallos consecutivos



Presente: Probabilidad intacta



La Distribución Geométrica posee una propiedad extraordinaria: Falta de Memoria (**Memoryless Property**). El universo no tiene registro de tus derrotas previas.

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

Dado que ya esperaste s intentos sin éxito, la probabilidad de esperar t intentos adicionales es exactamente la misma que si empezaras desde cero.

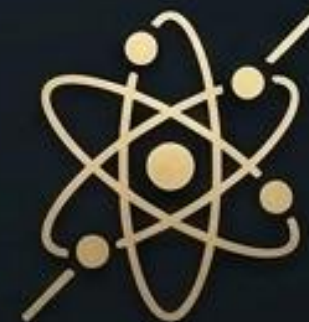
La Esperanza de Triunfar



¿Cuántos intentos esperamos hacer en promedio hasta lograr el primer éxito?
El Valor Esperado $E[X]$ es la suma de una serie infinita que converge en una
fórmula de asombrosa elegancia: $E[X] = 1/p$.



Si la chance de encestar un tiro libre es $p = 0.50$ (50%), esperamos lanzar en promedio 2 tiros hasta encestar el primero.



Si la chance de capturar una partícula rara en un detector es $p = 0.05$ (5%), esperamos realizar 20 mediciones.

* Varianza: $\text{Var}(X) = (1-p) / p^2$
Gemini Notebook



Ámsterdam, 1657: El Nacimiento del Universo Sin Reemplazo

*“¿Qué sucede si los jugadores extraen las bolillas de la urna...
Y NO LAS DEVUELVEN
para la siguiente jugada?”*

— John Hudde en correspondencia a Christiaan Huygens.

Durante la Edad de Oro holandesa, el burgomaestre John Hudde detectó una falla fatal en el primer libro de probabilidad. Al extraer elementos de un conjunto finito sin devolverlos, el entorno cambia permanentemente. Los ensayos ya no son independientes. Así nació la necesidad de un nuevo modelo.

La Distribución Hipergeométrica: Probabilidad Dinámica



Universo: 52



Universo: 51

Cuando extraemos elementos de una población de tamaño finito y no los devolvemos, la composición cambia en cada paso. La probabilidad ya no es constante y la Binomial se vuelve obsoleta.

N: Población total (ej. 52 cartas).

n: Tamaño de la muestra extraída.

K: Éxitos totales en la población (ej. 4 Ases).

x: Número de éxitos buscados en la muestra.

Construyendo la Probabilidad (Regla de Laplace)

Maneras de elegir éxitos:
Seleccionamos x éxitos de los K disponibles.

$$\begin{bmatrix} K \\ x \end{bmatrix}$$

Maneras de elegir fracasos:
Seleccionamos el resto de la muestra ($n-x$) de los fracasos disponibles ($N-K$).

$$\begin{bmatrix} N-K \\ n-x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}$$

Casos Totales: Todas las combinaciones posibles de extraer n elementos del universo N .

La Corrección por Población Finita

$n \ll N$

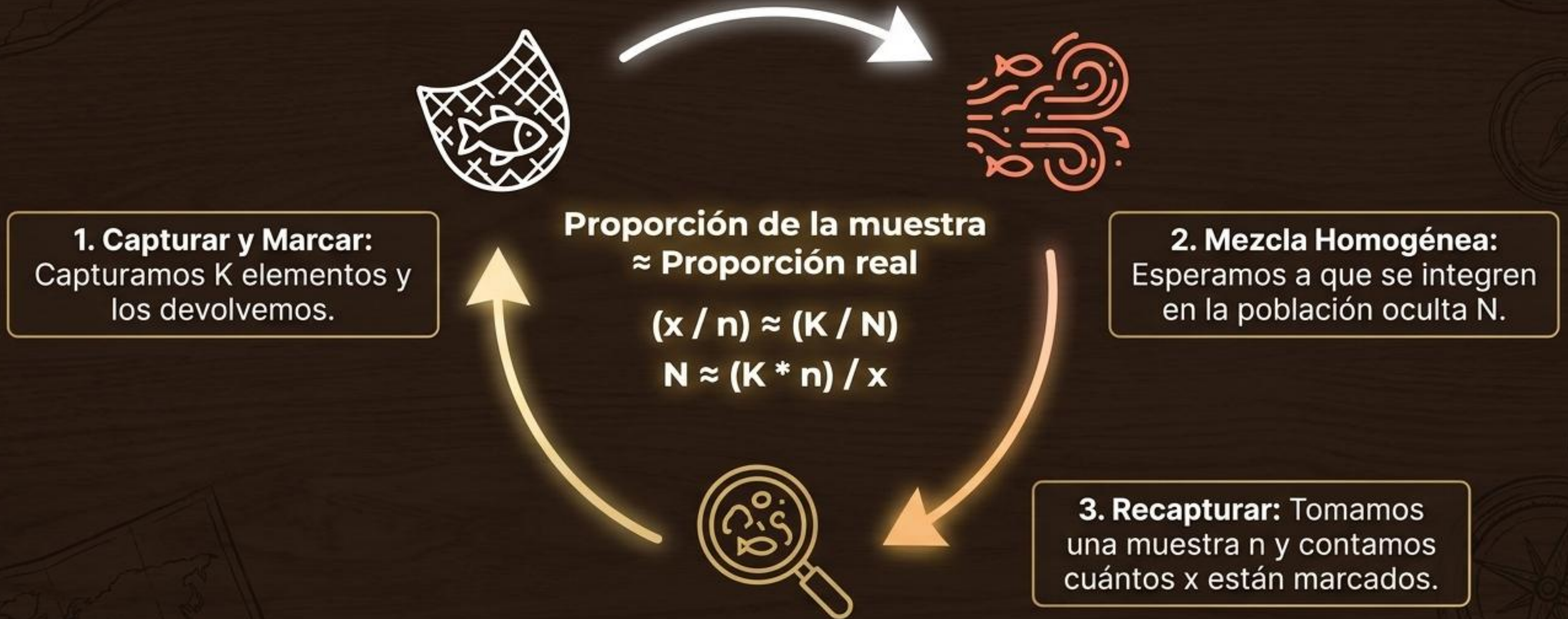
$n = N$

Valor Esperado: $E[X] = n * \left(\frac{K}{N}\right)$ (Idéntico a la Binomial si definimos $p = \frac{K}{N}$).

$$\text{Varianza: } \text{Var}(X) = n * \frac{K}{N} * \left(1 - \frac{K}{N}\right) * \left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

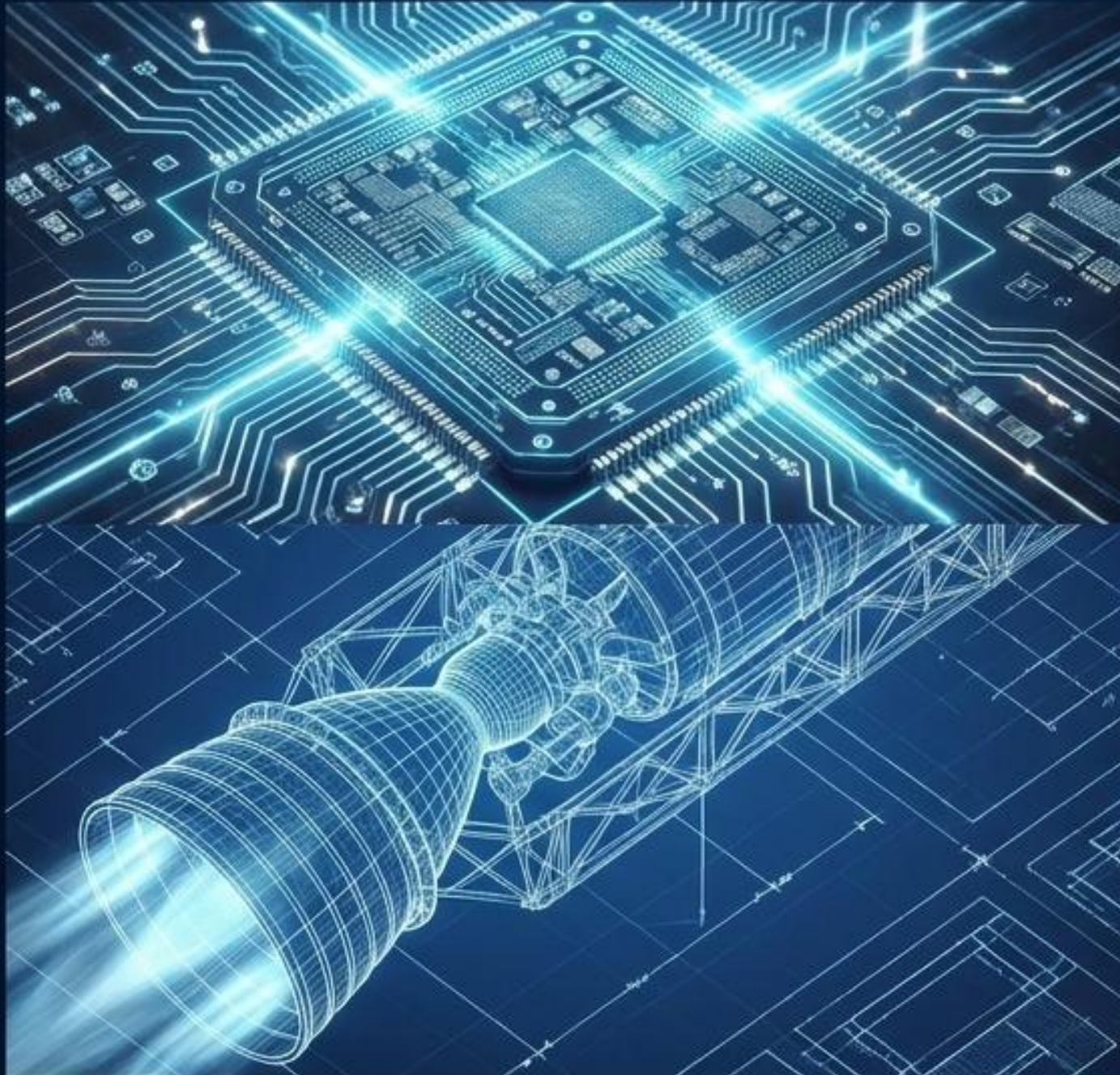
El Factor de Corrección $(N-n)/(N-1)$. Como extraemos sin reemplazo, la incertidumbre disminuye. Si nuestra muestra cubre a toda la población ($n = N$), este factor se vuelve 0. ¡La varianza desaparece porque ya no hay incertidumbre!

Aplicación I: El Lago Matemático (Ecología)



El Índice de Lincoln-Petersen permite a los biólogos calcular poblaciones de especies en peligro de extinción sin intervenir masivamente su hábitat.

Aplicación II: Cohetes y Control de Calidad



En la industria aeroespacial, las pruebas de estrés a menudo destruyen el componente. Si recibimos un lote de $N = 100$ microchips, probarlos todos significa quedarnos sin piezas.

Debemos tomar una muestra aleatoria n y probarla de forma destructiva (sin reemplazo). La distribución Hipergeométrica es la única herramienta matemática precisa para calcular el riesgo de aprobar un lote que contiene defectos ocultos basándonos en una pequeña muestra destruida.

El Taller de Luka: Desafíos Rápidos

Geométrica: La Celada de Ajedrez



Datos: Probabilidad de que caigan en la trampa $p = 0.25$. Buscamos el éxito en el cuarto rival ($k = 4$).

Cálculo: $P(X = 4) = (0.75)^3 * 0.25$

Resolución: $0.4218 * 0.25 = 10.55\%$.
(Esperando en promedio $E[X] = 4$ partidas).

Hipergeométrica: Los Cuatro Ases



Datos: Mazo $N = 52$, Ases $K = 4$. Robamos mano de $n = 5$. Buscamos $x = 2$ Ases.

Cálculo: $[(4 \text{ sobre } 2) * (48 \text{ sobre } 3)] / (52 \text{ sobre } 5)$

Resolución: $[6 * 17,296] / 2,598,960 = 3.99\%$.

El Cuadro de Mando de la Probabilidad Discreta

La tabla de síntesis de los cuatro modelos discretos fundamentales.

	Binomial	Poisson	Geométrica	Hipergeométrica
Condición Operativa	n ensayos independientes con reemplazo	Eventos raros en tiempo/espacio continuo	Intentos independientes hasta el 1.º éxito	Muestreo de n elementos sin reemplazo
Parámetros Clave	n, p	λ	p	N, K, n
Ecuación $P(X=x)$	$\binom{n}{x} * p^x * (1-p)^{n-x}$	$\frac{e^{-\lambda} * \lambda^x}{x!}$	$(1-p)^{x-1} * p$	$\frac{\binom{K}{x} * \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
Valor Esperado $E[X]$	$n * p$	λ	$\frac{1}{p}$	$n * \frac{K}{N}$

El Reto de la Flota Galáctica

Prepara tu cuaderno de exploración para nuestra próxima aventura. Resuelve estos escenarios tácticos:



Challenge A (Geométrica): Búsqueda de Exoplanetas

Probabilidad de hallar un planeta habitable $p = 0.10$.

Misión: Calcular la probabilidad exacta de encontrarlo en el tercer intento y el tiempo de espera esperado.



Challenge B (Hipergeométrica): Fotografías Orbitales

Cúmulo de $N = 20$ planetas ($K = 6$ gigantes, 14 rocosos). El telescopio escanea $n = 4$ sin reemplazo.

Misión: Calcular la probabilidad de fotografiar exactamente 2 gigantes gaseosos.

