CÁLCULO DE LA SECCIÓN EFICAZ DIFERENCIAL

R. O. Barrachina

1. Colisión de esferas rígidas

En el capítulo un capítulo anterior demostramos que, conocida la *ecuación de dispersión* que relaciona el ángulo de dispersión θ con el parámetro de impacto ρ para la colisión de una partícula por un centro de fuerza, la correspondiente sección eficaz diferencial en el sistema centro de masa se calcula como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{|\mathrm{sen}(\theta)|} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| , \tag{1}$$

mientras que la transformación al sistema del laboratorio está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_P}(\theta_P) &= \Theta\left(m_B/m_P - \mathrm{sen}\theta_P\right) \\ &\times \left[\frac{1+(m_P/m_B)^2+\cos(2\theta_P)}{\sqrt{1-(m_P/m_B)^2 \mathrm{sen}^2(\theta_P)}} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta^+) + \Theta(m_P - m_B)\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta^-) \right) \right. \\ &\left. + 2\,\frac{m_P}{m_B}\cos(\theta_P) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta^+) - \Theta(m_P - m_B)\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta^-) \right) \right] , \end{aligned}$$

con

$$\theta^{\pm} = \arccos\left[-\frac{m_P}{m_B}\,\mathrm{sen}^2(\theta_P) \pm \cos(\theta_P)\sqrt{1-\frac{m_P^2}{m_B^2}\,\mathrm{sen}^2(\theta_P)} \right] .$$

Cómo primera aplicación consideremos que tanto el blanco como el proyectil son esferas rígidas de radios a_B y a_P, respectivamente. Ambos rebotan en forma especular, de manera tal que

$$\rho = a\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = a\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2}$$

con $a = a_B + a_P$, y reemplazando en la ecuación anterior para la sección eficaz obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{|\mathrm{sen}(\theta)|}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{a\ \cos(\theta\,/\,2)}{|\mathrm{sen}(\theta)|}\left|\frac{1}{2}\ a\ \mathrm{sen}(\theta/2)\right| = \frac{1}{4}\ a^2 . \tag{3}$$

Vemos que en este caso particular la dispersión es isotrópica. Los proyectiles tienen igual probabilidad de ser dispersados en cualquier dirección.

En términos de la energía transferida

$$T = T_o \,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$$

con

$$T_o = \frac{2m^2}{m_B}\, v_\infty^2$$

obtenemos

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\pi\, a^2}{T_o}\, \Theta(T_o - T)$$

que nuevamente es constante. Realizando la transformación de la ecuación 3 al sistema de referencia del laboratorio obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_P} &= \Bigg(2\,(1 - \Theta(m_P - m_B))\, \frac{m_P}{m_B} \cos(\theta_P) + \\ &+ (1 - \Theta(m_P - m_B))\, \frac{1 + (m_P/m_B)^2 \cos(2\theta_P)}{\sqrt{1 - (m_P/m_B)^2 \,\mathrm{sen}^2(\theta_P)}} \Bigg) \frac{1}{4}\, a^2 \,. \end{aligned}$$

Si integramos esta sección eficaz diferencial obtenemos

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \int \frac{d\sigma}{d\Omega_P}\, d\Omega_P = \int \frac{d\sigma}{dT}\, dT = \pi\, a^2$$

que es precisamente el area lateral que el blanco enfrenta al haz incidente. Esta cantidad se denomina “sección eficaz total”.

2. Sección eficaz total

Si el blanco enfrenta un area lateral σ al haz incidente de flujo J, $J\sigma$ es el número total de partículas que por unidad de tiempo son afectadas por la presencia del blanco y dispersadas en todas direcciones. Mutiplicando por el número total de blancos tenemos finalmente

$$\int I d\Omega = J N \sigma$$

Comparando con una expresión anterior vemos que el area σ que el blanco enfrenta al haz incidente es, ni más ni menos, que la sección eficaz diferencial integrada sobre la esfera unidad

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

A esta cantidad la llamamos sección eficaz total y representa una medida del *area de impacto* sobre la cual debe caer el proyectil para ser dispersado. Por ejemplo, en la colisión entre esferas rígidas de radios a_B y a_P, como la considerada anteriormente, la sección eficaz diferencial resulta ser igual a la sección transversal, $\sigma = \pi(a_B + a_P)^2$.

3. Dispersión por una superficie de revolución

Consideremos ahora la dispersión de un proyectil puntual por una superficie de revolución $y = y(z)$ arbitraria. El ángulo de dispersión es igual al doble de la pendiente de la curva $y(z)$, o sea

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{dy}{dz}\,. \tag{4}$$

Esta ecuación nos provee una relación entre el ángulo de dispersión θ y el parámetro de impacto ρ, a partir de la cual podemos obtener la sección eficaz. Por ejemplo, para una esfera rígida de radio a como la estudiada en la sección anterior tenemos que $\rho^2 = a^2 - (z - a)^2$, con $z \leq a$, con lo cual

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{2\,\rho}\,\frac{d\rho^2}{dz} = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}$$

que podemos escribir como

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\rho}{a}\,,$$

y reemplazando en la expresión 1 para la sección eficaz, obtenemos finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}$$

Como siguiente ejemplo, consideremos una superficie de revolución dada por

$$\rho^{n+1} = \frac{(n+1)\,\pi}{2\,B(1/2, n/2)}\, b^n\, z$$

con n un número natural y donde b tiene unidades de longitud. La definición del factor de proporcionalidad en la definición de la superficie de revolución $\rho^{n+1} \propto b^n\, z$ es, en principio, arbitraria. Nuestra rebuscadísima elección, que incluye la función beta

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

quedará justificada más adelante, cuando apliquemos los resultados obtenidos en esta sección.

Reemplazando en la ecuación 4 resulta

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{(n+1)\,\rho^n}\,\frac{d}{dz}\,\rho^{n+1} = \frac{\pi}{2\,B(1/2, n/2)}\,\left(\frac{b}{\rho}\right)^n$$

Finalmente, reemplazando en la expresión para la sección eficaz, obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n}\,\left(\frac{\pi}{2\,B(1/2, n/2)\,\mathrm{tg}(\theta/2)}\right)^{2/n}\,\left(\frac{b}{\mathrm{sen}(\theta)}\right)^2$$

Vemos que la sección eficaz tiene unidades de area, tal como era de esperarse. También advertimos que diverge tanto en la dirección hacia adelante,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{n}\,\left(\frac{\pi}{B(1/2, n/2)\,\theta}\right)^{2/n}\,\left(\frac{b}{\theta}\right)^2 \qquad \theta \approx 0$$

como hacia atrás (excepto para $n = 1$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{n}\,\left(\frac{\pi}{2\,B(1/2, n/2)}\right)^{2/n}\,\left(\frac{b}{2}\right)^2\,\left(\frac{2}{\pi - \theta}\right)^{2-2/n} \qquad \theta \approx \pi$$

En este punto, el proverbial lector sagaz se estará preguntando porqué gastamos tanta tinta en un tema tan excesivamente académico como éste. Quizás la mejor manera de explicarlo sea considerando la superficie parabólica de revolución $\rho^2 = bz$, correspondiente al caso particular $n = 1$. La sección eficaz diferencial está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(b/4)^2}{\mathrm{sen}^4\,(\theta/2)}\,.$$

Vemos que ésta es ni más ni menos que la sección eficaz de Rutherford que calculamos en un capítulo anterior. En dicho caso la longitud característica b estaba dada por

$$b = \frac{|Z|}{m\,v_\infty^2\,/\,2}\,.$$

Más adelante veremos otros ejemplos donde esta analogía entre la dispersíon por un centro de fuerza y por una superficie de revolución también resulta de mucha utilidad.

4. Dispersión por una barrera esférica de potencial

Como siguiente ejemplo consideraremos la dispersión por una barrera esférica de radio a y altura U

$$V(r) = U\Theta(a - r)$$

La partícula se mueve en línea recta hasta llegar a la esfera donde se “refracta” y reduce su velocidad. Por conservación de energía, la velocidad v_o de la partícula dentro de la esfera es tal que

$$\frac{1}{2}\,m\,v_\infty^2 \;=\; \frac{1}{2}\,m\,v_o^2 \;+\; U$$

Por otra parte, como al penetrar en la esfera, la partícula no experimenta ninguna fuerza paralela a la superficie, dicha componente del impulso debe conservarse

$$m\, v_\infty \text{sen}\alpha \;=\; m\, v_o \text{sen}\beta \;,$$

donde α y β son los ángulos que forma la trayectoria con el radio de la esfera fuera y dentro de la misma, respectivamente. Eliminando v_o a partir de la primer ecuación, obtenemos una relación entre los ángulos de incidencia α y refracción β (ley de Snell) dada por

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} = n \tag{5}$$

donde, por analogía con la óptica geométrica, hemos definido el "índice de refracción"

$$n = \frac{v_o}{v_\infty} = \sqrt{1 - \frac{U}{m\, v_\infty^2 \,/\, 2}}$$

Reemplazando el parámetro de impacto $\rho = a\ \text{sen}\alpha$ y el ángulo de dispersión $\theta = 2\,(\beta - \alpha)$ en esta ecuación obtenemos la siguiente relación de dispersión

$$\rho^2 = a^2\ \frac{n^2\,\text{sen}^2(\theta\,/\,2)}{1\,+\,n^2\;-2\,n\cos(\theta\,/\,2)} \tag{6}$$

Vemos en la ecuación 5 que si el parámetro de impacto es tal que $\text{sen}(\alpha) \;>\; n$ la partícula no logra penetrar en la esfera y se refleja como si se tratase de una esfera rígida como la estudiada en el comienzo de este capítulo. En este caso, a partir de la ecuación 2, tenemos que

$$\rho = a\ \cos\,(\theta/2) \tag{7}$$

lo que define otra rama para la relación de dispersión. Tenemos entonces

$$\begin{array}{lcll} \cos(\theta/2) & = & (1/n)\left[(\rho/a)^2 + \sqrt{(1-(\rho/a)^2)\,(n^2-(\rho/a)^2)}\right] & 0 \le \rho/a < n \\ & & \rho/a & n \le \rho/a < 1 \\ & & 1 & 1 \le \rho/a \end{array}$$

Vemos que el ángulo de dispersión no puede superar cierto valor límite

$$\theta_0 \;=\; 2\arccos(n) = 2\,\text{arcsen}\sqrt{\frac{U}{m\,v_\infty^2\,/\,2}}$$

y que, por debajo de este valor, cada ángulo θ puede ser alcanzado por dos trayectorias distintas, correspondientes a dos valores distintos del parámetro de impacto ρ. Al evaluar la sección eficaz debemos tener en cuenta ambas contribuciones, resultando finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{a^2}{4}\ \frac{n^2}{\cos(\theta/2)}\ \frac{(n\cos(\theta/2)-1)\,(n-\cos(\theta/2))}{\left(1+n^2-2\,n\cos(\theta/2)\right)^2} + \frac{a^2}{4}\right]\ \Theta(\theta_0-\theta) \tag{8}$$

5. Dispersión por un pozo esférico de potencial

Ahora vamos a considerar un tipo de colisión muy similar al anterior, la dispersión por un pozo esférico de radio a y profundidad U

$$V(r) = -U\,\Theta(a-r)$$

Por medio de un cálculo muy parecido al realizado en la sección anterior obtenemos la siguiente relación de dispersión

$$\rho^2 = a^2\ \frac{n^2\,\text{sen}^2(\theta\,/\,2)}{1\,+\,n^2\;-2\,n\cos(\theta\,/\,2)}$$

con

$$n = \frac{v_o}{v_\infty} = \sqrt{1 + \frac{U}{m\, v_\infty^2 \,/\, 2}}$$

A diferencia de lo que ocurre en la barrera esférica, ahora $n > 1$ y, por lo tanto, no puede producirse ningún efecto de reflexión total. El ángulo de dispersión está relacionado "uno a uno" con el parámetro de impacto ρ, tomando todos los valores entre 0 y un valor máximo igual a $\theta_b = 2\ \arccos(1\,/\,n)$ (correspondiente a $\rho = a$), tal como muestra la figura. Reemplazando en la expresión 1 para la sección eficaz, obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}\ \frac{n^2}{\cos\,(\theta/2)}\ \frac{(n\,\cos\,(\theta/2)\;-\;1)\quad(n\;-\;\cos\,(\theta/2))}{\left(1\,+\,n^2\;-2\,n\cos(\theta\,/\,2)\right)^2}\ \Theta(\theta_b\;-\;\theta)$$

Esta enumeración de distintos potenciales y secciones eficaces que hemos estado haciendo hasta ahora se está volviendo demasiada larga y aburrida, así que propongo interrumpirla por un momento y dedicarnos, en el próximo capítulo, a discutir un tema muchísimo más entretenido. Más adelante retomaremos el cálculo de secciones eficaces, esta vez referidas a colisiones de partículas contra potenciales centrales.

Pero antes de terminar quisiera hacer una aclaración que, a mi parecer, es muy importante. Es posible que a esta altura el lector se esté preguntando cuál ha sido el objetivo del presente capítulo. A primera vista puede parecer que se trató de una simple enumeración de distintos procesos de colisión de complejidad creciente, una serie más de esos ejercicios puramente académicos a los cuales nos hemos acostumbrado en tantos cursos de nuestra carrera[1]. Sin embargo, y aunque un poco de "ejercitación" nunca viene mal, no ha sido ésta la única finalidad de los temas presentados hasta aquí. Por ejemplo, en lo que respecta a los procesos de dispersión por superficies de revolución, ya me he referido a la futura utilidad de esta idea, y creo que la hemos apreciado claramente en el caso particular de la dispersión por un potencial coulombiano. Los otros ejemplos (esfera rígida, barrera y pozo de potencial) no sólo han servido para introducir algunos conceptos importantes, como son la sección eficaz total, el ángulo límite o la relación de dispersión multivaluada, sino que el uso de cierta terminología (índice de refracción, ley de Snell, ...) ya habrá convencido a la mayoría de los lectores de que estos ejemplos están muy lejos de ser "puros ejercicios académicos". Con ellos hemos dado un primer paso en el estudio de la dispersión de luz por esferas ("gotas") de índice de refracción n. Así, en el próximo capítulo estudiaremos una extensión directa de estos modelos que nos permitirá explicar uno de los fenómenos más hermosos de la naturaleza: la formación del Arco Iris.

Preguntas y ejercicios

17. Graficar la sección eficaz diferencial correspondiente a la colisión de esferas rígidas en el sistema de laboratorio, para diferentes valores del cociente m_P/m_B entre las masas del proyectil y del blanco.

18. Graficar la sección eficaz diferencial para la dispersión por una superficie de revolución $\rho^{n+1} \propto b^n z$ para distintos valores de n.

19. Graficar la relación de dispersión y la sección eficaz diferencial para la dispersión por una barrera esférica de potencial de radio a e índice de refracción n. Considerar también el caso de un pozo de potencial ($n > 1$).

Notas

[1] *Sea un caballo esférico de masa despreciable...*