LOS EFECTOS GLORIA Y ARCO IRIS

R. O. Barrachina

1. Divergencia de la sección eficaz diferencial

Consideremos un potencial interatómico típico, repulsivo a cortas distancias y atractivo a grandes distancias. Si el parámetro de impacto ρ es grande, el ángulo θ es negativo. Para parámetros de impacto pequeños, en cambio, θ es positivo. Finalmente, para $\rho = 0$ el ángulo toma el valor $\theta = \pi$ correspondiente a la dispersión hacia atrás. Para evaluar la sección eficaz, restringimos el ángulo al rango $0 \leq \theta \leq \pi$. Vemos que la relación entre el parámetro de impacto ρ y este ángulo de *dispersión* no es "uno a uno", sino que, para θ por debajo de cierto valor θ_1, tiene tres ramas. Por esto, y tal como hicimos al estudiar la dispersión por una barrera esférica de potencial, debemos generalizar la sección eficaz para incluir todas las contribuciones a un mismo ángulo de dispersión.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)} \sum_i \rho_i \left| \frac{d\rho_i}{d\theta} \right|$$

Algo que llama rápidamente la atención es que la sección eficaz puede divergir para ciertos ángulos particulares. Esto ocurre, por ejemplo, para $\theta = \theta_1$, donde $d\rho/d\theta$ se vuelve infinito. Lo que ocurre es que una banda ancha $\delta\rho$ de trayectorias incidentes son dispersadas hacia una banda angular $\delta\theta$ muy estrecha, produciendo un brusco aumento de la intensidad en esa dirección. Este efecto se denomina Arco Iris, por su similitud con el conocido fenómeno óptico.

Vemos además que $sen\theta = 0$ para $\theta = \pi$ pero, como el parámetro de impacto también se anula, ello no produce ninguna divergencia en la sección eficaz, salvo que también se anule $d\theta/d\rho$. Cuando $\theta = 0$, en cambio, el parámetro de impacto no se anula y se produce una nueva divergencia de la sección eficaz. Nuevamente, por su similitud con un conocido fenómeno óptico, este efecto se denomina Gloria.

Vemos que ambos efectos ocurren cuando más de un parámetro de impacto contribuye a un dado ángulo de dispersión. Cuánticamente esto produce una interferencia entre las distintas ramas de $\rho(\theta)$ que, tal como veremos en un próximo capítulo, se manifiesta como oscilaciones de la sección eficaz con el ángulo de dispersión.

2. Descripción del arco iris óptico

Probablemente, el primer intento de describir la formación del arco iris de manera racional se debió a Aristóteles. El pudo explicar la forma circular del arco iris, proponiendo correctamente que este se formaba en las nubes por algún tipo inusual de reflexión de la luz del sol en un ángulo fijo. Después de esta conjetura de Aristóteles pasaron 17 siglos sin que se hiciera ningún progreso significativo en el estudio de la naturaleza del arco iris. Durante la edad media, hubo varios "comentarios" sobre este modelo. Entre estos comentaristas, debemos mencionar al polaco Witelo y al árabe Alhazen. Witelo, por ejemplo, supuso que el modelo de Aristóteles, basado exclusivamente en procesos de reflexión, no bastaba para explicar correctamente la formación del arco iris, y que sería necesario tener en cuenta el fenómeno de refracción. Sin embargo, no desarrolló esta idea.En 1266 Roger Bacon midió por primera vez el ángulo formado por la luz incidente y los rayos del arco iris, obteniendo un valor de aproximadamente 40^o. En 1304 el monje alemán Teodoríco (m. 1311) de Freiberg agregó una conjetura adicional a la teoría de Aristóteles, sugiriendo que cada gota individual de una nube es capaz de producir un arco iris. Esta misma conclusión fué alcanzada simultáneamente por su cnotemporaneo, el astrónomo persa Qutb al-din al-Shirazi (m. 1311). Los trabajos de Teodoríco fueron bien conocidos en Alemania, y enseñados en la Universidad de Erfurt hasta comienzos del siglo XVI. Posteriormente, y como resultado de la perdida de interés en el pensamiento medieval durante el ascenso del humanismo, el rastro de estos trabajos se pierde hasta el siglo XIX, cuando son redescubiertos por Giambatista Venturi[1]. Por otro lado, las ideas de Qutb al-din fueron desarrolladas por su alumno Kamal al-din (m.c. 1320), en un comentario sobre la óptica de Alhazen, pero se esta línea de investigación concluye con él. Esto explica que este importantísimo avance permaneciera desconocido por casi tres siglos. Esto explica los avances y retrocesos de Johann Kepler (1571 - 1630) en el estudio de este fenómeno. Uno de los primeros comentarios de Kepler sobre el arco iris se encuentra en notas marginales de su *Mysterium Cosmographicum* (1596), donde, en una extraña mezcla de la teoría de Aristóteles y la numerología pitagórica, compara el rango de colores del arco iris con los tonos de la música. En 1604 publica un comentario sobre la óptica de Witelo[2] donde desarrolla una cruda modificación de la teoría de Aristóteles, incorporando el fenómeno de refracción, tal como habían sugerido los comentaristas medievales. Finalmente, por una carta escrita entre el 2 y el 11 de Octubre de 1606 y enviada al matemático Thomas Harriot (1560 - 1621) de la Universidad de Oxford, nos enteramos de que para esa fecha Kepler había llegado a la conclusión de que el arco iris no se forma en la "región sublime" por encima de las nubes, ni en las mismas nubes como un todo, sino por reflexión y refracción en las pequeñas gotas de lluvia[3]. Lamentablemente, La relación aparente entre el ángulo del arco iris, que erroneamente consideraba igual a 45^o grados, y los 22 grados y medio del fenómeno de "halo", Kepler intentó buscar una explicación común a ambos fenómenos[4]. En este modelo, ambos procesos son producidos por los rayos de sol que inciden sobre la superficie de la gota de lluvia en forma tangencial. El halo sería el resultado de una única reflexión interna de estos rayos, mientras que el arco itis requeriría de dos reflexiones[5]. Vemos como las ideas de Kepler sobre el arco iris evolucionaron desde una descripción aristotélica hasta los umbrales de una explicación válida en términos de procesos de refracción y reflexión de luz en una gota de agua. Otros trabajos contemporaneos, en particular el *Photismi de lumine* de Francisco Maurolico (1494-1575), abad de Messina; y el tomo segundo de *De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride tractatus* de Marco Antonio de Dominis (1566-1624), arzobispo de Spalatro; ambos publicados en 1611, desarrollaban el mismo tipo de explicación. En particular, la descripción del arco iris hecha por De Dominis en términos de una única reflexión interna es "casi" correcta[6], salvo por olvidar que la luz debe refractarse no sólo al entrar en la gota de agua, sino también al salir de ella. Finalmente, debemos mencionar al holandés Willebrord Snell quien, en un trabajo sobre el cometa de 1618, indica que el halo y arco iris se debe a fenómenos de reflexión y refracción en las gotas de agua.

Estos trabajos se acercaron a dar una descripción válida del arco iris, pero fue René Descartes[7] quién por primera vez dio una explicación totalmente satisfactoria, en un tratado publicado en 1637. Como acabo de decir, por esa época ya se sabía que el Arco Iris se originaba cuando la luz del sol caía sobre gotas de lluvia. Descartes advirtió que esto no dependía muy críticamente del tamaño de las gotas. Así es como pudo reproducir el Arco Iris en una experiencia de laboratorio usando un globo de vidrio lleno de agua como una gran gota de lluvia. Así descubrió que el arco iris se forma con la luz que, habiendo entrado en la gota, se refleja una vez dentro de ella antes de salir. Esto era mucho más que simples especulaciones. Descartes calculó matemáticamente la trayectoria de cualquier rayo de luz dentro de la gota. Para ello tuvo que estudiar como se desvía un rayo de luz al cruzar el límite entre el aire y el agua. De hecho el holandés Willebrord Snell había descubierto la ley de la refracción 16 años antes de que Descartes publicara su tratado. Es casi seguro que Descartes no conocía este trabajos de Snell y, por lo tanto, redescubrió la ley de la refracción independientemente. Sin embargo, se originó una muy fuerte disputa en la comunidad científica de aquella época. Al respecto es interesante hacer notar que esa ley de la refracción se denomina ley de Snell en casi todo el mundo con excepción de Francia, donde se la conoce como ley de Descartes. Con esta ley, Descartes pudo calcular matemáticamente la trayectoria de cualquier rayo de luz dentro de la gota y vió que, en cierto ángulo, había una fuerte concentración de luz. Esa concentración de luz es lo que forma el arco iris. Así cada gota redirige los rayos de sol hacia atrás en un ángulo de 138 grados. Y entonces vemos en el cielo un gran arco luminoso con una abertura de $180^o - 138^o$, es decir de 42 grados, que es el efecto acumulado de la luz reflejada por cada gotita de lluvia en esa dirección. La próxima vez que vean un arco iris pueden fácilmente verificar si se cumple este modelo de Descartes. Prolonguen el arco hasta formar un círculo imaginario. Verán que el centro de ese circulo se encuentra en el punto antisolar; o sea en una dirección que, para el observador, está directamente opuesta al sol. Luego vean a cuantos grados de esa dirección se encuentra ubicado el arco iris. Para ello, basta que recuerden que, con el brazo extendido y separando bien los dedos de la mano, el ángulo entre los extremos del pulgar y el meñique es de aproximadamente 20 grados. Así que el Arco Iris se encontrará a unos dos palmos de distancia respecto del punto antisolar.

3. Dispersión de luz por una gota de agua

Descartes descubrió que el arco iris se forma como resultado de una trayectoria muy particular de la luz dentro de las gotas de lluvia, tal como se muestra en la siguiente figura. La luz penetra en la gota, refractándose, luego se refleja en la cara interna, y finalmente sale, produciéndose una nueva refracción. Nuevamente los ángulos de incidencia α y refracción β están relacionados por la ley de Snell

$$\frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\mathrm{sen}(\beta)} = n$$

donde n es el "índice de refracción" del agua ($n \approx 1{,}33$). al entrar en la gota, el rayo de luz se desvía un ángulo $\alpha - \beta$. La reflexión interna produce una nueva desviación en un ángulo igual a $\pi - 2\beta$. Finalmente, al abandonar la gota de agua, el rayo de luz se vuelve a desviar en un ángulo $\alpha - \beta$. De esta manera, el ángulo dispersión es

$$\theta = \pi + 2\,\alpha - 4\,\beta$$

Uniendo ambas ecuaciones obtenemos la siguiente relación entre el ángulo de dispersión θ y el ángulo inicial α

$$\theta \;=\; 2\,\alpha \;+\; 2\,\mathrm{arcsen}\left(1 \;-\; \frac{2}{n^2}\,\mathrm{sen}^2(\alpha)\right) \tag{1}$$

donde el ángulo de incidencia α está relacionado con el parámetro de impacto ρ por

$$\rho = a\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

con a el radio de la gota de agua. Finalmente, obtenemos la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\mathrm{sen}\theta}\,\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{a\,\mathrm{sen}\alpha}{\mathrm{sen}\theta}\;a\cos\alpha\;\left|\frac{d\theta}{d\alpha}\right|^{-1} \tag{2}$$

La derivada $d\theta/d\alpha$ se puede obtener a partir de la ecuación 1

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = 2 - \frac{4}{n}\,\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)\,/\,n^2}} \tag{3}$$

Vemos que esta derivada se anula cuando el ángulo de incidencia es igual a

$$\alpha_1 = \arccos\sqrt{\frac{1}{3}\,(n^2 - 1)}$$

Reemplazando en la ecuación 1, vemos que este ángulo de incidencia corresponde a un ángulo de arco iris igual a $\theta_1 = 137{,}63^o$ para la luz roja en agua ($n = 1{,}331$). Si se grafica este ángulo de arco iris en función del índice de refracción se observa que dicha curva alcanza el valor $\theta_1 = \pi$ con pendiente nula para $n = 2$. Esta condición representa el límite teórico para la formación del arco iris. Corresponde a rayos de luz que inciden con parámetro de impacto nulo, es decir directamente hacia el centro de la gota, y son reflejados hacia atrás en dirección a la fuente de luz. Con las ecuaciones 2 y 3 hemos completado el cálculo de la sección eficaz diferencial.

Para ángulos mayores que θ_1 hay una zona de oscuridad que se denomina "banda oscura de Alejandro", en honor del filósofo griego Alejandro de Afrodisia, quien fue el primero en describirla en el siglo III. También debemos destacar que el radio de la gota sólo aparece como un factor multiplicativo. En principio, y tal como había descubierto Descartes, la formación del arco iris no depende del tamaño de las gotas de agua[8].

4. Reducción de la intensidad por refracción y reflexión

Aún cuando hemos podido calcular la sección eficaz diferencial, para obtener la intensidad en función del ángulo todavía nos falta considerar un aspecto más del problema. Con cada refracción ó reflexión en la superficie de la gota, los rayos de luz reducen su intensidad. Para poder continuar con nuestros cálculos, debemos obtener el correspondiente coeficiente de atenuación $R(\theta)$, es decir la fracción de la intensidad original del rayo de luz que sale de la gota luego de haber sufrido dos refracciones y una reflexión. Evidentemente, el cálculo de esta magnitud excede el objetivo del presente libro, así que vamos a pedir prestado este resultado a algún buen libro de Electromagnetismo. Por ejemplo, si la polarización es paralela al plano de incidencia, una fracción

$$\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right)^2$$

se refleja, y una fracción

$$1 - \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right)^2$$

se refracta. En cambio, si la polarización es perpendicular, las fracciones de luz reflejada y transmitida son

$$\left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)^2$$

y

$$1 - \left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)^2$$

respectivamente. De esta manera, si un rayo de luz penetra en una gota, se refleja y vuelve a salir, la fracción de la intensidad original del rayo que sale de la gota es

$$R_\parallel = \left(1 - \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right)^2\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right)^2$$

si la polarización es paralela al plano de incidencia, y

$$R_\perp = \left(1 - \left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)^2\right)^2 \left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)^2$$

si la polarización es perpendicular. Finalmente, la fracción total de la intensidad original de un rayo de luz no polarizado que abandona la gota de agua es

$$R = R_{\parallel} \; + \; R_{\perp}$$

Uno podría pensar que esta fracción debería ser máxima en el ángulo de arco iris, donde la intensidad total es máxima. Sin embargo vemos que no es así. Podríamos decir que el arco iris se forma en $\theta = 138^o$ a pesar de este factor R, y debido exclusivamente a la dispersión de la luz[9] por la gota representada por la sección eficaz 3.

Antes de cerrar esta sección indiquemos que el arco iris está casi completamente polarizado en una dirección paralela al plano de incidencia, lo cual puede verificarse fácilmente observando un arco iris con lentes de sol polarizados. El coeficiente de polarización paralela

$$P = \frac{R_{\parallel}}{R_{\parallel} \; + \; R_{\perp}}$$

evaluado en el ángulo de arco iris θ_1 muestra que el haz está no polarizado para $n = 1$ y $n = 2$, mientras que para n próximo al valor correspondiente al agua, la polarización es máxima.

Uniendo estos resultados con los de la última sección, obtenemos que la intensidad de luz observada en un dado ángulo θ es proporcional al producto

$$R(\theta) \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Con este resultado hemos dado un tratamiento matemático moderno al modelo propuesto por Descartes en 1637. Hemos visto como él pudo explicar casi todas las características principales del arco iris, excepto la más importante, sus colores. Esto sólo se pudo entender treinta años después, cuando Isaac Newton descubrió que la luz blanca estaba formada por una mezcla de luces de todos los colores, y que la desviación de un rayo de luz al pasar del aire al agua es diferente para cada color. En efecto, el índice de refracción del agua varía entre $n = 1{,}331$ para la luz roja y $n = 1{,}343$ para la luz azul. El resultado es una separación de los colores como la que ocurre como en un prisma: El rojo se desvía menos que el azul, y por lo tanto sale de la gota formando un ángulo distinto. De hecho la luz violeta emerge a aproximadamente 140 grados y la luz roja a 138 grados, con todos los otros colores visibles entre medio.

5. Arco Iris multiples

En el museo de Orsay de Paris se encuentra una pintura de Jean-François Millet (1814 - 1875) llamada “Le Printemps” (1868–1873). En ella se representa un paisaje campestre después de una tormenta. Lo que más llama la atención es que no hay uno, sino dos arco iris. Y no se trata de un delirio del artista, sino de su buen sentido de observación. Ese segundo arco iris existe, sólo que muchas veces es muy tenue como para ser fácilmente visible. Ya había sido explicado por Descartes como debido a una segunda reflexión de la luz en el interior de la gota de agua, y con un radio angular de aproximadamente 51 grados. Tal como vimos en la sección anterior, en cada encuentro con la superficie de la gota, parte de la luz pasa de largo y parte rebota. Esto hace que en esa segunda reflexión se pierda algo de la luz original, y por ende el arco iris secundario es más tenue que el primario. Por supuesto que este mecanismo se puede repetir. Uno esperaría ver aún otro arco iris, debido a tres reflexiones de la luz dentro de la gota de agua. Aparentemente, Descartes no estudió esta posibilidad. Años más tarde, Newton derivó una expresión matemática para el radio angular del arco iris resultante de un número k arbitrario de reflexiones internas

$$\theta = k\,\pi \; + \; 2\alpha \; - \; 2\,(k+1)\,\beta \tag{4}$$

Derivando respecto de α obtenemos

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = 2 \; - \; \frac{2\,(k+1)}{n} \, \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 \; - \; \mathrm{sen}^2(\alpha)\,/\,n^2}}$$

Vemos que esta derivada se anula cuando el ángulo de incidencia es igual a

$$\alpha_k = \arccos\sqrt{\frac{n^2 \; - \; 1}{k\,(k+2)}}$$

Reemplazando en la ecuación 4, obtendríamos el ángulo de arco iris correspondiente a k reflexiones internas. Sin embargo, en su momento Newton sólo aplicó este resultado a los casos primario y secundario. Parece que el primero que estudió la posibilidad de un arco iris terciario fué Edmund Halley –el mismo del cometa–, y el resultado fue una gran sorpresa. Pues él encontró que el arco iris terciario tenía un radio de aproximadamente 40^o, pero no alrededor del punto antisolar, sino alrededor del sol.

La razón por la cual no vemos este tercer arco iris puede deberse a varios motivos: En primerísimo lugar, el cielo cerca del sol es mucho más brillante que del lado opuesto. Además hay que tener en cuenta una reducción de la sección eficaz diferencial 2 debido a que el arco iris terciario ocurre a un ángulo de incidencia mayor que los arco iris primario y secundario. En tercer lugar, el arco iris terciario tiene un ancho angular mucho mayor ($\Delta\theta = 4{,}37^o$), lo que reduce su brillo . Por último debemos recordar la pérdida de intensidad que ocurre en cada reflexión adicional del rayo de luz dentro de la gota de agua. Según los resultados de la sección anterior, esta perdida de intensidad está dada por

$$R = R_{\parallel} \; + \; R_{\perp}$$

con

$$R_{\parallel} = \left(1 \; - \; \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right)^2\right)^2 \; \left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\right)^{2k}$$

y

$$R_{\perp} = \left(1 \; - \; \left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)^2\right)^2 \; \left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}\right)^{2k} \; .$$

El arco iris de cuarto orden también se encuentra alrededor del sol, a un ángulo de 46^o. Recién el quinto arco iris vuelve a estar ubicado alrededor del punto antisolar, pero ya es tan débil que no se puede ver. En el laboratorio, sin embargo, pueden verse los arco iris hasta órdenes muy —por encima del décimo–, y ubicados donde predice la expresión de Newton. Sin embargo, hasta donde se, nadie ha visto arco iris de orden superior al segundo en forma natural. Es una pena que las leyes de la física sean tan inflexibles y no nos permitan ver estos arco iris de orden superior, ya que el espectáculo sería asombroso. El cielo estaría cubierto de círculos de colores por todas partes.

Con esto terminamos la descripción clásica del arco iris. Para quien esté interesado en profundizar en este tema damos la siguiente bibliografía adicional

C. B. Boyer : *From Myth to Mathematics* (Thomas Yoseloff, New York, 1959).

M. Minnaert : *Light & Colour in the Open Air* (Dover Publ., New York, 1954).

F. Schaaf : *Wonders of the Sky* (Dover Publ., New York, 1983).

Preguntas y ejercicios

20. Graficar el ángulo de arco iris como función del índice de refracción.

21. En una misma figura mostrar el parámetro de impacto y la sección eficaz diferencial como función del ángulo de dispersión, para un índice de refracción igual al de la luz roja en agua ($n = 1{,}331$). Analizar el resultado.

22. Graficar el factor de atenuación R como función del ángulo de dispersión θ para la formación del arco iris por una gota de agua de índice de refracción $n = 1{,}331$.

23. Graficar el coeficiente de polarización paralela del arco iris como función del índice de refracción n.

24. Graficar el radio angular de los arco iris múltiples como función del número k de reflexiones internas.

Notas

[1] *Commentary sopra la storia e le teoria dell' ottica* vol. I (Bologna, 1814), pags. 149-180.

[2] *Ad Vitellionem parlipomena quibus astronmiae pars optica traditur* (Francofurti, 1604)

[3] Aparentemente, Kepler no estaba al tanto de teorías previas, como por ejemplo la de Johann Fleisher (1539-1593) desarrollada en su trabajo *De iride doctrina Aristotelis et Vitellionis certa methoda comprehensa* de 1571, que explicaban el arco iris en términos de gotas individuales.

[4] El halo de 22^o no debe confundirse con la "aureola" luminosa que se ve frecuentemente alrededor la luna. El halo de 22 grados alrededor del sol, al igual que el fenómeno de "soles falsos", se forma por acción de pequeños cristales de hielo en la alta atmósfera.

[5] Aunque este modelo está en el camino correcto, conduce a resultados completamente erroneos, al predecir un ángulo de 33 $3/4^o$ para el arco iris y 67 $1/2^o$ para el halo.

[6] Esta similitud cualitativa con la explicación de Descartes, llevó a Newton y Leibniz a prácticamente acusarlo de plagio.

[7] ver M. Nussenzveig: *The Theory of the Rainbow*, Scientific American **236** (4), 116 (April 1977). Una detallada descripción de los trabajos precartesianos puede encontrarse en C. B. Boyer: *Am. J. Phys.* **18**, 360 (1950).

[8] Esto no es rigurosamente cierto. Debido a la naturaleza ondulatoria de la luz, el aspecto del arco iris depende fuertemente del tamaño de las gotas.

[9] J. D. Walker: *Multiple rainbows from single drops of water and other liquids*, American Journal of Physics **44**, 421 (1976).