DISPERSIÓN POR UN CENTRO DE FUERZA

R. O. Barrachina

Dispersión por un centro de fuerza

1. Dispersión por un potencial Z/r^2

Como primer ejemplo, consideremos un potencial dipolar de la forma $V(r) = Z/r^2$. Tal como veremos, este potencial (correspondiente a la interacción asintótica entre una partícula cargada y un átomo de hidrógeno) representa un caso "límite" entre dos familias de potenciales con características particulares. En este sentido nos permitirá interpretar distintos efectos: como son las órbitas en espiral y la caída al centro de fuerzas. Reemplazando en la ecuación

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho/r)^2 - 2\,V(r)\,/\,m\,v_\infty^2}} \, \frac{\rho\, dr}{r^2} \,, \tag{1}$$

obtenemos la siguiente relación de dispersión

$$\theta = \pi \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \mathrm{sg}(Z) b^2}} \right) \tag{2}$$

donde $\mathrm{sg}(x) = x/|x|$ es la función signo y donde hemos definido la distancia característica $b = \sqrt{|Z|\,/\,\frac{1}{2}\,m\,v_\infty^2}$.

En el caso repulsivo ($Z > 0$) podemos reemplazar en la ecuación

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{|\mathrm{sen}\theta|} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| \,. \tag{3}$$

obteniendo la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi\, b^2}{4\,\mathrm{sen}\theta} \left(\frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(2\pi - \theta)^2} \right)$$

Hasta ahora no ha habido ninguna sorpresa. Sin embargo, si el potencial es atractivo, es decir si $Z < 0$, el cálculo deja de ser así de simple y debemos ir con muchísimo más cuidado. La relación de dispersión es muy parecida a la del caso repulsivo (sólo un cambio de signo en el radicando). A pesar de esta similitud, inmediatamente advertimos dos diferencias muy importantes. En primer lugar, vemos que sólo está definida para parámetros de impacto ρ mayores que b. Si el parámetro de impacto es menor que b, el proyectil puede superar la barrera centrífuga y alcanzar el centro de fuerza. Decimos que se ha producido su “caída al centro de fuerzas”. Podemos definir entonces una sección eficaz de caída al centro de fuerzas $\sigma_c = \pi\, b^2$.

Esta caída al centro de fuerzas ocurrirá siempre que la energía cinética inicial $E = mv_\infty^2/2$ pueda superar cualquier barrera generada por el potencial efectivo $V(r) + E\rho^2/r^2$. Vemos que una condición necesaria para que esto ocurra es que el potencial sea atractivo a cortas distancias y que además tienda a $-\infty$ para $r \to 0$ suficientemente rápido como para compensar la divergencia de la barrera centrífuga. A estos potenciales se los denomina “singulares”. Un caso particular de mucho interés está dado por los centros de atracción de la forma $V(r) = -Z/r^n$, con $n > 2$, que estudiaremos más adelante.

La otra característica sobresaliente de la relación de dispersión anterior es que es multivaluada. Cada posible ángulo θ, restringido al intervalo $[0\,,\,\pi]$, puede ser alcanzado por infinitas trayectorias con distintos parámetros de impacto ρ. Invirtiendo la relación $\theta(\rho)$ dada por la ecuación 2 obtenemos la siguiente sucesión de parámetros de impacto que contribuyen a la dispersión en un mismo ángulo θ

$$\rho_{\mathrm{j}}^2 = b^2 + \frac{\pi}{2}\, b^2 \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{j} + \theta - 2\pi} - \frac{1}{2\pi\mathrm{j} + \theta} \right)$$

donde el índice $\mathrm{j} = ... -2, -1, 1, 2, ...$ recorre todos los números enteros con excepción del cero. Este índice está relacionado con el número de vueltas “completas”, $n = |j| - 1$, dadas por el proyectil alrededor del centro de fuerzas (ver la siguiente figura).

Reemplazando en la ecuación 3 para la sección eficaz diferencial y sumando todas las contribuciones obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)} \sum_{\mathrm{j}\neq 0} \rho_{\mathrm{j}} \left| \frac{d\rho_{\mathrm{j}}}{d\theta} \right|^2 =$$

$$= \frac{\pi\, b^2}{4\,\mathrm{sen}(\theta)} \sum_{\mathrm{j}\neq 0} \left| \frac{1}{(2\pi\mathrm{j} + \theta - 2\pi)^2} - \frac{1}{(2\pi\mathrm{j} + \theta)^2} \right| \qquad (4)$$

Vemos que el segundo término de cada sumando se cancela con el primer término del siguiente sumando, excepto cuando $j = -1$ y $j = 1$, resultando

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi\, b^2}{4\,\mathrm{sen}(\theta)} \left(\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(2\pi - \theta)^2} \right)$$

Sorprendentemente, después de tantas vueltas hemos obtenido una expresión para la sección eficaz diferencial que es muy parecida a la del caso repulsivo. De hecho podemos reunir ambas expresiones en una única ecuación, escribiendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi}{2\, m\, v_\infty^2} \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)} \left(\frac{|Z|}{\theta^2} - \frac{Z}{(2\pi - \theta)^2} \right)$$

Para ángulos pequeños, $\theta \ll \pi$, el primer término domina sobre el segundo, y ambas secciones eficaces coinciden.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\pi\, b^2}{4\,\theta^3} \qquad \text{si} \qquad \theta \ll \pi \qquad (5)$$

Para ángulos grandes, en cambio, la sección eficaz correspondiente al caso repulsivo ($Z > 0$) tiende a un valor bien definido

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\theta=\pi} = b^2 \qquad (6)$$

mientras que, en el caso atractivo ($Z < 0$), diverge

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{b^2}{2\,\pi\,\mathrm{sen}(\theta)} \qquad \text{si} \qquad \pi - \theta \ll \pi$$

Este comportamiento es característico de un *efecto Gloria hacia atrás*, como el estudiado en un capítulo anterior.

Antes de cerrar esta sección debemos destacar un último detalle. La sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi\, b^2}{8\,\mathrm{sen}(\theta)}\,\frac{1}{1\,-\,\cos(\theta)}$$

para la dispersión por una superficie de revolución de la forma

$$\rho^3 \;=\; \frac{3}{4}\,\pi\, b^2\, z$$

da una excelente aproximación al caso de un potencial dipolar. Más aún, advertimos que las secciones eficaces tienen el mismo comportamiento en la dirección hacia adelante, es decir para $\theta \ll \pi$. Vemos que la superficie de revolución estudiada en un capítulo anterior conduce a una sección eficaz diferencial que, no sólo coincide con la correspondiente al potencial coulombiano $V(r) = Z/r$ para $n = 1$, sino que -en el límite de ángulo pequeño- es igual a la del potencial $V(r) = Z/r^2$ cuando $n = 2$. ¿Será ésta una tendencia? ¿La sección eficaz de una superficie de revolución $\rho^{n+1} \propto z$ coincide con la del potencial $V(r) = Z/r^n$ en la aproximación de ángulos pequeños?

2. Dispersión por potenciales de la forma Z/r^n

Ahora describiremos algunas importantes características de la familia de potenciales de la forma $V(r) = Z/r^n$ $(n > 0)$. En primer lugar vemos que el ángulo de dispersión θ depende del parámetro de impacto ρ sólo a través de la variable adimensionalizada ρ/b con

$$b \;=\; \left(\frac{Z}{m\,v_\infty^2\,/\,2}\right)^{1/n}$$

En efecto, haciendo el cambio de variables $r \to x = r/b$ en la relación de dispersión, obtenemos

$$\begin{aligned}\theta \;&=\; \pi - 2\int_{r_o}^{\infty} \frac{\rho}{\sqrt{1-(b/r)^n-(\rho/r)^2}}\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &=\; \pi - 2\int_{x_o(\rho/b)}^{\infty} \frac{\rho/b}{\sqrt{1-(1/x)^n-(\rho/bx)^2}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sección eficaz puede escribirse

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \;&=\; \frac{\rho}{\mathrm{sen}(\theta)}\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}theta}\right| = b^2\,\frac{\rho/b}{\mathrm{sen}(\theta)}\left|\frac{\mathrm{d}(\rho/b)}{\mathrm{d}theta}\right| \\ &=\; b^2\,\frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}\Omega}\end{aligned}$$

donde la sección eficaz reducida $\mathrm{d}\sigma^*/\mathrm{d}\Omega$ es independiente de la energía o la constante Z. Tenemos entonces que

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \left(\frac{Z}{mv_\infty^2/2}\right)^{2/n}$$

En el límite $n \to \infty$ recuperamos el resultado ya conocido de que la sección eficaz para la colisión de esferas rígidas es independiente de la energía. Para el potencial coulombiano, $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \propto Z^2/v_\infty^4$, en total acuerdo con resultados anteriores.

La teoría clásica de colisiones no describe adecuadamente la dependencia en velocidad a ángulos pequeños. Por lo tanto, la sección eficaz total (dominada por las colisiones de ángulos pequeños) no sigue la misma ley de proporcionalidad[1]. En un tratamiento cuántico aproximado se obtiene la ley[2]

$$\sigma = \pi\,\frac{2n-3}{n-2}\left(\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{2/(n-1)}\left(\frac{\hbar Z}{mv_\infty}\right)^{2/(n-1)}$$

válida para $n > 3$. Según Massey y Mohr, el error relativo de esta expresión aproximada es menor que el 5 %.

También es posible obtener la dependencia de la sección eficaz con θ en la aproximación de ángulos pequeños. Reemplazando $V(r) = Z/r^n$ $(n > 0)$ en la ecuación de dispersión para ángulos pequeños tenemos que

$$\theta = -n\,\rho\, b^n \int_{\rho}^{\infty} \frac{1}{r^{1+n}}\,\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

Haciendo el cambio de variables $x = (\rho/r)^2$, la integral se transforma en una integral euleriana resultando

$$\theta = -\frac{\pi}{B(1/2, n/2)}\left(\frac{b}{\rho}\right)^n \tag{7}$$

donde

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Finalmente, obtenemos la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n}\left(\frac{b}{\theta}\right)^2\left(\frac{\pi}{B(1/2, n/2)\,\theta}\right)^{2/n}$$

Advertimos que esta expresión coincide con el límite de pequeño ángulo correspondiente a la dispersión por una superficie de revolución $\rho^{n+1} \propto z$. Esto nos lleva a suponer que la expresión

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n}\left(\frac{b}{\mathrm{sen}\theta}\right)^2\left(\frac{\pi}{2\,B(1/2, n/2)\,\mathrm{tg}(\theta/2)}\right)^{2/n}$$

también representa una buena aproximación para ángulos grandes de la sección eficaz de dispersión por potenciales de la forma $V(r) = Z/r^n$. Sin embargo no es así. Una mejor aproximación de la sección eficaz para potenciales $V(r) = Z/r^n$, se logra reemplazado θ en la relación de dispersión 7, no por $2\mathrm{tg}(\theta/2)$, sino por $2\mathrm{sen}(\theta/2)$, lo cual nos conduce a la sección eficaz

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n}\left(\frac{b}{2\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\right)^2\left(\frac{\pi}{2\,B(1/2, n/2)\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\right)^{2/n}$$

Vemos que esta aproximación también conduce a la sección eficaz exacta en el caso coulombiano $n = 1$.

En términos de la energía transferida $T = T_o\mathrm{sen}^2(\theta/2)$ escribimos la sección eficaz

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T} = \frac{4\pi}{T_o}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi b^2}{T^n}\left(\frac{\pi}{2\,B(1/2, n/2)}\right)^{2/n}\left(\frac{T_o}{T}\right)^{1/n}$$

3. Dispersión por un potencial de polarización

Estudiaremos ahora un caso particular del grupo de potenciales descrito en la sección anterior. El potencial entre un proyectil de carga Z_P y un átomo neutro está dado por

$$V(r) = -\frac{\alpha_B Z_P^2 e^2}{2r^4}$$

donde α_B es la polarizabilidad del blanco. El ángulo de dispersión está dado por

$$\theta = \pi - 2\int_{r_o}^{\infty}\frac{\rho}{\sqrt{1 + (b/r)^4 - (\rho/r)^2}}\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

donde, nuevamente, hemos definido la longitud característica

$$b = \left(\frac{\alpha_B Z_P^2 e^2}{m v_\infty^2}\right)^{1/4}$$

Como siempre, r_o es la distancia de máximo acercamiento, determinada como el mayor de los dos posibles ceros del denominador $1-(b/r_o)^4-(\rho/r_o)^2 = 0$. La solución es

$$r_o = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4(b/\rho)^4}}$$

que sólo existe cuando el parámetro de impacto es mayor que cierto valor crítico $\rho_c = \sqrt{2}b$. En dicho caso la partícula se acerca hasta una distancia r_o del centro de fuerzas que nunca es menor que b. Cuando $\rho < \rho_c$, en cambio, la partícula cae en un movimiento espiral hacia el centro de fuerzas. En la figura mostramos estas distintas trayectorias en una versión modificada de un dibujo original de Paul Langevin, quien en 1905 estudió este problema en relación con la difusión mutua de una mezcla de gases[3]

El problema ahora es darle algún sentido a estas órbitas que, para $\rho < \rho_c$, caen hacia el centro de fuerzas. Una posibilidad es suponer la existencia de un centro repulsivo, $V(r) = \infty$ para $r < R$, a la manera de los potenciales de

Sutherland descritos en la sección anterior. El proyectil alcanza esa ”paredz rebota especularmente contra ella. Otra opción es considerar que el centro de fuerzas es “transparente”. El proyectil alcanza el centro de fuerzas y emerge de él manteniendo la dirección de movimiento original[4]. Finalmente debemos mencionar el “modelo de dispersión aleatoria” que supone que cuando el proyectil cae al centro de fuerzas, es emitido nuevamente pero en una dirección al azar.

Pero la posibilidad más interesante se da al suponer que cuando la distancia entre el proyectil y el blanco es menor que cierto valor crítico R ocurra cierto tipo de reacción. Este análisis fue utilizado por en el cálculo de la recombinación del sistema ion - molécula[5]. En tanto que la energía sea suficientemente baja como para que R sea menor que la distancia de máximo acercamiento b de las órbitas abiertas, esta sección eficaz de reacción será igual a la correspondiente a las trayectorias que caen hacia el centro de fuerza

$$\sigma_R = \pi\rho_c^2 = 2\pi b^2 \qquad \text{para} \qquad R < b$$

Cuando la energía supera este valor límite, la zona de reacción $r \leq R$ también puede ser alcanzada por trayectorias abiertas con parámetros de impacto menores que $\rho_R = R\sqrt{1+(b/R)^4}$. Entonces, completamos el resultado anterior, escribiendo

$$\begin{aligned} \sigma_R &= 2\pi b^2 & \text{para} \quad E < \alpha_B Z_P^2 e^2/2R^4 \\ &= \pi R^2\left(1+\left(\tfrac{b}{R}\right)^4\right) & \text{para} \quad E \geq \alpha_B Z_P^2 e^2/2R^4 \end{aligned}$$

E. Vogt y G. H. Wannier[6] han mostrado que la descripción cuántica del potencial de polarización es en muchos aspectos similar a la obtenida en un tratamiento clásico. En particular, ellos demuestran que la expresión cuántica para la sección eficaz de “captura” es el doble que la sección eficaz clásica para caída al centro de fuerzas.

$$\sigma_c = 4\pi b^2 = 4\pi\sqrt{\frac{\alpha_B Z_P^2 e^2}{2E}}$$

En la figura mostramos la sección eficaz “total” para la colisión de electrones contra gases nobles (en diferentes estados de excitación) como función de la variable reducida $\sqrt{\alpha_B/E}$. Vemos que la sección eficaz σ_c se ajusta bastante bien a los datos medidos en un amplísimo rango de energías[7]. Aún la sección eficaz correspondiente al estado fundamental del Helio se acerca al valor teórico σ_c a altas energías. Los efectos de dispersión elástica y resonancias no parecen ser significativos.

4. Caída al centro de fuerzas y orbitación

El resultado anterior puede generalizarse fácilmente al caso de un potencial de la forma $V(r) = -Z/r^n$ con $n > 2$. Definimos el potencial efectivo

$$U(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{Z}{r^n} = E\left(\frac{\rho^2}{r^2} - \frac{b^n}{r^n}\right)$$

donde la longitud característica b está definida por $b = (Z/E)^n$. Esta función tiene un máximo en $r_m = (nb^n/2\rho^2)^{1/(n-2)}$ que actúa como una barrera de potencial para aquellas partículas que inciden de manera tal que la energía E es menor que $U(r_m)$. Ello ocurre siempre que el parámetro de impacto es mayor que cierto valor crítico ρ_c. Despejando ρ_c de la ecuación $E = U(r_m)$, obtenemos

$$\rho_c = \sqrt{\frac{n}{2}\left(\frac{2}{n-2}\right)^{(n-2)/n}}\, b$$

Aquellas trayectorias con $\rho > \rho_c$ no caen al centro de fuerzas, alcanzando una distancia de máximo acercamiento r_o necesariamente mayor que la que se alcanza en el caso crítico

$$r_c = r_m(\rho_c) = \left(\frac{n-2}{2}\right)^{1/n} b$$

Cuando $\rho < \rho_c$, en cambio, la partícula alcanza el centro de fuerzas. Si ρ es próximo a ρ_c, la velocidad radial dr/dt es mínima para $r = r_c$ y el proyectil se demora en dicha órbita, girando alrededor del centro de fuerzas, antes de caer hacia él en una trayectoria en espiral. Dicho fenómeno se denomina *orbitación*, y puede dar lugar a efectos observables, tal como veremos más adelante.

Una vez superada la zona de orbitación, y para r pequeño, es posible aproximar la ecuación de las órbitas

$$\phi = \phi_o - \int_r^{r_o} \frac{\rho}{\sqrt{1-(\rho/r)^2+(b/r)^n}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

despreciando los primeros dos términos, 1 y $-(b/r)^2$, del radicando frente al tercero, $(b/r)^n$, obteniendo

$$\phi \approx \phi_o - \frac{\rho}{b^{n/2}} \int_r^{r_o} r^{(n-4)/2}\,\mathrm{d}r = \phi_o - \frac{\rho}{b^{n/2}} \frac{2}{n-2} \left(r_o^{(n-2)/2} - r^{(n-2)/2} \right)$$

Vemos así que el proyectil realiza un número finito de revoluciones en su caída al centro de fuerzas. Esta situación contrasta con lo que ocurre con el potencial dipolar $V(r) = -Z/r^2$. En dicho caso no es posible despreciar el término de energía centrífuga (ρ^2/r^2), resultando

$$\phi \approx \phi_o - \frac{\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}} \ln\left(\frac{r_o}{r}\right)$$

Vemos que el ángulo ϕ diverge en el límite $r \to 0$. A pesar de ello, como la velocidad radial

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2mE\left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{b^n}{r/n}\right)}$$

también diverge para $r \to 0$, ¡el proyectil cae al centro de fuerzas en un tiempo finito!

Finalmente, la sección eficaz de caída al centro de fuerzas es

$$\sigma_c = \pi\,\rho_c^2 = \frac{n}{2}\left(\frac{2}{n-2}\right)^{(n-2)/n} \pi\, b^2$$

Supongamos ahora que cuando la partícula se acerca hasta una distancia R del centro de fuerzas, se produce algún tipo de reacción (captura del proyectil, reacción química, etc.). Cuando la energía es tal que $R < r_c$, la única posibilidad es que se produzca la caída al centro de fuerzas. En dicho caso, la sección eficaz de reacción debe coincidir con σ_c. Cuando $R > r_c$, en cambio, la sección eficaz de reacción es igual a $\pi\rho_R^2$, con ρ_R solución de $E = U(R)$. Escribimos finalmente

$$\begin{aligned} \sigma_R &= \tfrac{n}{2}\left(\tfrac{2}{n-2}\right)^{(n-2)/n} \pi\, b^2 \quad \text{para} \quad R < \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^{1/n} b \\ &= \pi\, R^2\,(1 + b^n/R^n) \qquad \text{para} \quad R \geq \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^{1/n} b \end{aligned}$$

Digamos por último que, si el potencial $V(r)$ es repulsivo ó -aún siendo atractivo- es no singular, la caída al centro de fuerzas no es posible. En dicha situación la sección eficaz de reacción está definida por todas aquellas trayectorias que, teniendo un parámetro de impacto ρ menor que $\rho_R = R\sqrt{1 - V(R)/E}$, llegarán a una distancia del centro de fuerzas menor que R. De esta manera, la sección eficaz de reacción es[8]

$$\sigma_R = \pi\rho_R^2 = \pi R^2 \left(1 - \frac{V(R)}{E}\right)$$

Preguntas y ejercicios

32. Calcular y graficar la relación de dispersión $\rho = \rho(\theta)$ y la sección eficaz diferencial para un potencial dipolar $V(r) = Z/r^2$, tanto en los casos repulsivo $(Z > 0)$ como atractivo $(Z < 0)$.

33. Comparar la sección eficaz diferencial para un potencial dipolar $V(r) = Z/r^2$, tanto en los casos repulsivo $(Z > 0)$ como atractivo $(Z < 0)$, con la correspondiente a la dispersión por una superficie de revolución $\rho^3 = 3\pi b^2 z/4$, con $b = (2|Z|/mv_\infty^2)$.

34. Confirmar el comentario al final de la sección 3, a partir de una lectura del artículo L. G. Christophorou and E. Illenberger, *Phys. Lett. A* **173**, 78-82 (1993).

Notas

[1]Sin embargo, la dependencia anterior es válida para la sección eficaz de "difusión"

$$\sigma_d = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,(1-\cos(\theta))\,\mathrm{d}\Omega$$

donde las contribuciones de pequeño ángulo son suprimidas por el factor de peso $1-\cos(\theta)$.

[2]H. S. W. Massey and C. B. O. Mohr: *Proc. Roy. Soc. (London)* A **144**, 188 (1934).

[3]P. Langevin: "Une formule fondamentale de théorie cinétique" (*Annales de chimie et de physique*), Serie 8, **5**, pags. 245 - 288 (1905).

[4]T. Kihara, M. H. Taylor and J. O. Hirschfelder: Phys. Fluids, **3**. 715 (1960).

[5]G. Gioumousis and D. P. Stevenson, *J. Chem. Phys.* **29**, 294 (1958).

[6]*Phys. Rev.* **95**, 1190 (1954).

[7]L. G. Christophorou and E. Illenberger, *Phys. Lett. A* **173**, 78-82 (1993).

[8]Este modelo fue desarrollado por R. D. Present (*Kinetic Theory of Gases*, pags. 152-153 (McGraw-Hill, New York, 1958)) y aplicado por E. A: Mason y J. T. Vanderslice (*J. Chem Phys.* **95**, 1190 (1954)) a ciertos problemas específicos.