



DISPERSIÓN POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA

R. O. Barrachina

1. Dispersión por un potencial coulombiano cortado

Como siguiente ejemplo de sección eficaz calculamos la dispersión de partículas por una fuerza coulombiana que actúa sólo hasta cierta distancia R

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Z}{r^3} \mathbf{r} \Theta(R - r)$$

con $\Theta(x)$ la función escalón de Heaviside, $\Theta(x) = 0$ si $x < 0$ y $\Theta(x) = 1$ si $x \geq 0$. Esta fuerza corresponde a un potencial coulombiano cortado

$$V(r) = Z \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \Theta(R - r)$$

generado por una carga puntual rodeada por un cascarón esférico de carga opuesta y radio R . Uno de los primeros en estudiar el problema de la dispersión por este tipo de potencial fué L. Mensing¹ en 1927. La correspondiente

relación de dispersión es²

$$\cos^2(\theta/2) = \frac{(1 + \xi)}{1 + \xi \frac{R^2}{\rho^2}} \quad \begin{array}{ll} \text{si } \rho < R \\ \text{si } \rho \geq R \end{array}$$

donde hemos definido la constante adimensional

$$\xi = 4 \frac{R}{b} \left(1 + \frac{R}{b} \right)$$

con $b = 2Z / m v_\infty^2$. La correspondiente sección eficaz diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \frac{1 + \xi}{(1 + \xi \sin^2(\theta/2))^2}$$

Cuando $b = -2R$ ($\xi = -1$) se da una situación muy especial, donde todas las trayectorias con parámetro de impacto menor que R terminan con un ángulo de dispersión igual a 180° . Como resultado de este fenómeno de retrodispersión, la sección eficaz se transforma en una delta de Dirac sobre



dicha dirección. En el límite de distancia de apantallamiento grande, es decir para $R \gg |b|$, obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{(b/4)^2}{((b/4R)^2 + \sin^2(\theta/2))^2}$$

recuperando así la sección eficaz de Rutherford cuando $\theta \gg b/R$. En el límite $\theta \rightarrow 0$, en cambio

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\theta=0} = \frac{R^2}{4} \left(1 + \frac{2R}{b} \right)^2$$

Vemos que, a diferencia de la sección eficaz de Rutherford, esta expresión es finita para todo ángulo. La sección eficaz total también es finita y coincide con el resultado esperado, $\sigma = \pi R^2$.

Así como la sección eficaz total de Rutherford diverge, también son infinitos los coeficientes de difusión en un gas ionizado. Estas dificultades llevaron a que, en el estudio de la penetración de partículas cargadas en la materia y de fenómenos de transporte en gases ionizados, se empleara una aproximación sugerida por S. Chapman³ en 1922, que consistía en anular la sección eficaz diferencial para colisiones con parámetros de impacto mayores que cierta distancia R . Como el parámetro de impacto determina al ángulo, esta aproximación es equivalente a anular la sección eficaz para ángulos menores que cierto valor característico θ_0 . En vista de los resultados obtenidos en esta sección resulta claro que esta discontinuidad de la sección eficaz para ángulos pequeños no es razonable. El uso de un potencial coulombiano apantallado, en cambio, tiene más sentido físico, y conduce a una sección eficaz con una dependencia lorentziana con respecto a $\sin^2(\theta/2)$.

2. Dispersión de ángulo pequeño por una distribución de carga

El problema general de la dispersión de un proyectil de carga Z_P por una distribución esférica de carga $\eta(r)$ sólo puede ser resuelto en ciertas

situaciones particulares, como la anterior, ó en forma aproximada. Este es el caso de la aproximación de ángulo pequeño que describimos en un capítulo anterior. La energía potencial es

$$\begin{aligned} V(r) &= Z_P \int \frac{\eta(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \\ &= \frac{4\pi Z_P}{r} \int_0^r \eta(r') (r')^2 dr' + 4\pi Z_P \int_r^\infty \eta(r') r' dr' \end{aligned} \quad (1)$$

con lo cual

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi Z_P}{r^2} \int_0^r \eta(r') (r')^2 dr'$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación de dispersión en la aproximación de ángulos pequeños y realizando una integración elemental, obtenemos

$$\theta = \frac{2Z_P}{mv_\infty^2} \frac{1}{\rho} \left(4\pi \int_0^\infty \eta(r) r^2 dr - 4\pi \int_\rho^\infty \eta(r) \sqrt{r^2 - \rho^2} r dr \right)$$

Como primer ejemplo consideremos una esfera de radio R uniformemente cargada

$$\eta(r) = \frac{3}{4\pi R^3} Z_B \Theta(R - r)$$

donde Z_B es la carga total de la esfera. Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$\theta = \frac{b}{\rho} \left(1 - \Theta(R - \rho) \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^{3/2} \right)$$

donde hemos definido la distancia característica

$$b = \frac{2 Z_P Z_B}{m v_\infty^2}$$

La relación de dispersión $\theta(\rho)$ es bivaluada. Además el ángulo de dispersión está limitado a valores menores que cierto ángulo máximo

$$\theta_1 \approx 1.022 \frac{b}{R}$$



Con este resultado observamos que la aproximación de ángulos pequeños es completamente consistente en tanto que $b \ll R$. Además, sabemos que la sección eficaz diferencial presenta un efecto arco iris en este ángulo máximo de dispersión θ_1

Más generalmente podemos considerar una distribución de carga de la forma

$$\eta(r) = (Z_B^* - Z_B) \left(\chi \frac{3}{4\pi R^3} \Theta(R - r) + (1 - \chi) \frac{1}{4\pi R^2} \delta(r - R) \right) + Z_B \delta(\mathbf{r})$$

Esta distribución corresponde a una carga puntual Z_B en el origen, rodeada por una distribución esférica uniforme de carga $\chi(Z_B^* - Z_B)$ y radio R , y un cascarón esférico de carga $(1 - \chi)(Z_B^* - Z_B)$ e igual radio. La carga total del sistema es Z_B^* . El potencial correspondiente es

$$V(r) = \frac{Z_P Z_B^*}{r} + \theta(R - r) Z_P (Z_B^* - Z_B) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \frac{\chi}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right)$$

Cuando $Z_B^* = Z_B$ y $\chi = 0$ recuperamos el modelo de Mensing descrito en la sección anterior. Cuando $\chi = 1$, en cambio, obtenemos el modelo atómico usado por Rutherford en su trabajo de 1911. Este modelo, que describe un átomo neutro formado por un núcleo de carga Z_B rodeado por una distribución electrónica homogénea de radio R , también fué utilizado por otros muchos autores, entre ellos E. Wigner⁴ en 1934.

Preguntas y ejercicios

35. Calcular la relación de dispersión para un potencial coulombiano cortado de carga Z y radio R . Graficar ρ/R como función de θ para diferentes valores del parámetro adimensional b/R . Comparar con la relación de dispersión para un potencial coulombiano puro.

36. Calcular la sección eficaz diferencial para un potencial coulombiano cortado de carga Z y radio R y graficarla para diferentes valores del parámetro adimensional b/R . Comparar con la sección eficaz de Rutherford.
37. Mostrar que la sección eficaz diferencial para un potencial coulombiano cortado de carga Z y radio R toma la forma de una delta de Dirac cuando $b = -2R$.
38. Calcular la relación de dispersión en la aproximación de ángulos pequeños para el potencial generado por una esfera de radio R uniformemente cargada. Graficar $\theta = \theta(\rho)$. Encontrar el ángulo máximo de dispersión.
39. Calcular la sección eficaz diferencial en la aproximación de ángulos pequeños para el potencial generado por una esfera de radio R uniformemente cargada. Graficarla y justificar el resultado.

Notas

¹L. Mensing: Z. Phys. **45**, 603 (1927). Ver también M. R. Rose: Phys. Rev. **49**, 727 (1936).

²W. M. MacDonald: *Classical Scattering Cross Section for a Cut-Off Coulomb Potential*, American Journal of Physics **41**, 1337 - 1340 (1973). Este artículo tiene algunos errores de tipeo y notación.

³S. Chapman, Mon. Not. R. Astron. Soc. **82**, 292 (1922).

⁴Phys. Rev. **46**, 1002 (1934).

