Capítulo 1

Longitud y tiempo

La *mecánica* es la parte más antigua de la física. Como tal forma la base de muchas otras ramas de esa ciencia. Su objeto es el estudio del movimiento (cinemática) y equilibrio (estática) de los cuerpos. Cuando relacionamos el movimiento con las fuerzas aplicadas nos ocupamos de la *dinámica*.

1.1 La longitud

Para poder medir longitudes necesitamos definir algunas operaciones. Empecemos imaginando un método para decir cuando dos longitudes son iguales. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos cuerpos con bordes rectos. Si al poner ambos bordes lado a lado, con uno de los extremos coincidentes, los otros extremos también coinciden, decimos que ambos cuerpos tienen igual longitud.

La segunda operación no es tan sencilla. En primero lugar debemos notar que no todos los conceptos cuantitativos son iguales. Pensemos en la temperatura, por ejemplo. Sin duda es un concepto cuantitativo, pero de una naturaleza muy distinta a la de los tres conceptos que nos ocupan. La longitud, el tiempo y la masa son, o parecen ser, “magnitudes extensas” que verifican una regla de aditividad. Supongamos que colocamos lado a lado los cuerpos del ejemplo anterior, con sus bordes alineados y con dos de sus extremos en contacto. Decimos que la entidad física resultante (la línea recta formada por la combinación de ambos bordes) tendrá una longitud que es la suma de las longitudes de ambos cuerpos. A primera vista parece obvio que la longitud cumple esta regla de aditividad, pero eso es sólo porque así es en nuestra experiencia diaria. No hay nada que nos indique que debe ser siempre así. Podría ocurrir que en ciertas condiciones esta regla no sea válida. Les dejo a ustedes imaginar cuales podrían ser estas condiciones y cuales serían sus consecuencias. Como aperitivo les doy un buen ejemplo de una magnitud que parece ser aditiva y no lo es: la velocidad. Y no puede serlo porque existe un límite máximo para su magnitud (*id est* la velocidad de la luz).

Pasemos ahora a la tercera y última operación que “define” el concepto de longitud. Me estoy refiriendo a la elección de un objeto o un proceso natural que pueda ser reproducido fácilmente y que permita definir la unidad de medida. Una vez definida esta unidad, sólo resta aplicar la regla de aditividad para "medir" cuantas veces el objeto en cuestión contiene o es contenido por ella.

El el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad de longitud es el metro, que originalmente fue definido como la diez millonésima parte del cuadrante de la Tierra. El "métre des Archives" de 1799 fue medido en base al meridiano entre Dunquerque y Barcelona. El prototipo internacional de 1889 era una copia de ese primer"metro". Sirvió como unidad de longitud hasta 1960, cuando fue reemplazado por una definición basada en la longitud de onda de una cierta línea naranja del espectro de la luz emitida por el isótopo 86 del kriptón. A su vez, esta definición dio lugar en 1983 a la definición actual, que se deriva al asignar un valor definido a la velocidad de la luz en el vacío ($c_o = 299792458$ m/seg).

1.2 El tiempo

Trabajando con mucho cuidado (un cuidado que no tuvieron los Padres Fundadores de la Física) podemos imaginar formas de diseñar las tres reglas (de igualdad, aditividad y unidad) que nos permitan dar una definición operacional del tiempo. Sobre la regla de aditividad para el tiempo valen los mismos comentarios y las mismas dudas que discutimos en el caso de la longitud.

La unidad del Sistema Internacional para el tiempo es el segundo y está definida en términos de la frecuencia de una transición hiperfina del átomo de Cesio. En varios laboratorios nacionales se dispone de relojes de Cesio, con una incerteza estimada en 10^{-15}.

1.3 Algunas definiciones cinemáticas

Sobre la base de las magnitudes "primitivas" de tiempo y longitud, podemos ahora definir otras magnitudes "derivadas" para describir el movimiento. Un cuerpo en movimiento puede girar o vibrar. Para evitar estas complicaciones supondremos -por ahora- que el cuerpo es muy pequeño. Obviamente, este es un concepto relativo. Por ejemplo, la Tierra en su órbita alrededor del Sol puede considerarse como un objeto sin tamaño.

También el concepto de movimiento tiene un significado relativo: Se refiere a la modificación de la posición relativa de los cuerpos entre sí. Por ello se define un "cuerpo de referencia" idealizado como un "sistema de coordenadas" (Es decir una terna de ejes cartesianos ortogonales rígidos). Ubicamos una *partícula* por el *vector posición* $\mathbf{r}$ que va del cuerpo de referencia hasta el punto en cuestión. Al moverse, la posición de la partícula varía con el tiempo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. El lugar geométrico de los puntos que ocupa el cuerpo en su movimiento se llama *trayectoria*.

1.4 Sistemas de coordenadas

Como decíamos, al vector posición $\mathbf{r}$ lo podemos representar de manera unívoca por medio de sus *componentes* (x, y, z) respecto de un sistema de coordenadas definido por un *origen* O y tres vectores normalizados, o *versores*, ortogonales $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$. De esta manera, el vector posición puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\mathbf{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

y la distancia de la partícula al centro del sistema de coordenadas está dado por el *módulo*

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Una propiedad esencial de todo cálculo con vectores es su independencia respecto del sistema de coordenadas que por conveniencia se haya introducido para su mejor descripción. Supongamos que los tres versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ se sustituyen por otro conjunto $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ y $\hat{z}'$, también ortogonales entre sí, de manera tal que $\mathbf{r} = x'\,\hat{x}' + y'\,\hat{y}' + z'\,\hat{z}'$. Por el solo hecho de ser vectores, los versores $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ y $\hat{z}'$ están determinados por sus componentes en el sistema de coordenadas original $(\hat{x},\, \hat{y},\, \hat{z})$,

$$\begin{aligned}
\hat{x}' &= (\hat{x}\cdot\hat{x}')\;\hat{x} + (\hat{y}\cdot\hat{x}')\;\hat{y}\; + (\hat{z}\cdot\hat{x}')\;\hat{z} \\
\hat{y}' &= (\hat{x}\cdot\hat{y}')\;\hat{x} + (\hat{y}\cdot\hat{y}')\;\hat{y}\; + (\hat{z}\cdot\hat{y}')\;\hat{z} \\
\hat{z}' &= (\hat{x}\cdot\hat{z}')\;\hat{x} + (\hat{y}\cdot\hat{z}')\;\hat{y}\; + (\hat{z}\cdot\hat{z}')\;\hat{z}
\end{aligned}$$

Los coeficientes $(\,\cdot\,)$ se denominan *cosenos directores* de la transformación de coordenadas. Definiendo la matriz

$$\mathcal{A}_{\mathrm{OO}'} = \begin{bmatrix} \hat{x}\cdot\hat{x}' & \hat{y}\cdot\hat{x}' & \hat{z}\cdot\hat{x}' \\ \hat{x}\cdot\hat{y}' & \hat{y}\cdot\hat{y}' & \hat{z}\cdot\hat{y}' \\ \hat{x}\cdot\hat{z}' & \hat{y}\cdot\hat{z}' & \hat{z}\cdot\hat{z}' \end{bmatrix}$$

podemos reunir las expresiones anteriores en la siguiente relación matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} = \mathcal{A}_{\mathrm{OO}'} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

La normalidad y ortogonalidad de los nuevos versores implican ciertas condiciones sobre los coeficientes de la matriz $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=x,y,z} (\hat{n}\cdot\hat{x}')^2 \qquad \text{etc.} \\
0 &= \sum_{n=x,y,z} (\hat{n}\cdot\hat{x}')\,(\hat{n}\cdot\hat{y}') \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Estas condiciones indican que $\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}$ es una matriz *ortogonal*, es decir que

$$\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}} \cdot \mathcal{A}^t_{\mathrm{OO'}} = \mathcal{I}$$

donde el supraíndice t indica la transposición de los coeficientes de la matriz, e $\mathcal{I}$ es la matriz *identidad*. En otros términos, la transformación inversa está dada por $\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}} = \mathcal{A}^t_{\mathrm{OO'}}$.

Si anotamos con $[\mathbf{r}]_{\mathrm{O}}$ a la matriz columna formado por las componentes del vector $\mathbf{r}$ en el sistema de coordenadas O, es decir

$$[\mathbf{r}]_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

entonces,

$$[\mathbf{r}]_{\mathrm{O'}} = \mathcal{A}_{\mathrm{OO'}} \cdot [\mathbf{r}]_{\mathrm{O}}$$

Consideremos, por ejemplo, un sistema de coordenadas tal que el versor $\hat{z}'$ coincide con el $\hat{z}$, pero donde los versores $\hat{x}'$ y $\hat{y}'$ están rotados un ángulo ϕ en sentido antihorario respecto de los versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$, respectivamente. La matriz de tranformación es

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un teorema debido a Euler nos indica que toda transformación entre sistemas de coordenadas ortogonales es equivalente a una rotación de ángulo ϕ alrededor de un eje fijo $\hat{\phi}$. En otras palabras, siempre hay al menos una dirección a lo largo de la cual todo vector tiene las mismas componentes en uno y otro sistema de coordenadas[1]. La demostración de este importante teorema la veremos más adelante en el curso.

El conjunto de todas las posibles matrices $\mathcal{A}$ definen una estructura de la matemática denominada *grupo*. Se trata del grupo de matrices **O**rtogonales e**S**peciales en **3** dimensiones, o **SO(3)**.

1.5 Los ángulos de Euler

Entre las muchas contribuciones de Euler a la Dinámica Analítica (y veremos varias de ellas a lo largo de este curso) hay una muy simple y de una gran utilidad. El advirtió que los nueve coeficientes de una transformación $\mathcal{A}$ entre dos

[1]Mediante una transformación de semejanza es siempre posible transformar la matriz $\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}$ a un sistema de coordenadas en el que el eje $\hat{z}$ coincide con el eje de giro $\hat{\phi}$. En tal sistema de coordenadas la transformación es un giro de ángulo ϕ alrededor del eje $\hat{z}$ y está representada por la matriz anterior. Su traza es igual a $1 + 2\cos\phi$. Y como la traza es siempre invariante respecto de las transformaciones de semejanza se tiene que $\mathrm{Traza}(\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}) = 1 + 2\cos\phi$.

sistemas de coordenadas están ligados por las seis relaciones de la propiedad de ortogonalidad. Esto quiere decir que dicha matriz tiene sólo tres coeficientes independientes. Se presentaba entonces el problema de hallar una forma explícita para los coeficientes de $\mathcal{A}$ en términos de tres parámetros independientes. Euler propuso una elección con claro significado geométrico que utilizaremos varias veces a lo largo del curso. La manera más simple de comprender esta propuesta es realizando la transformación de un sistema al otro por medio de tres pasos sucesivos.

1. Primero una rotación de ángulo φ alrededor del eje $\hat{z}$.
2. Después una rotación de ángulo θ alrededor de la nueva posición del eje $\hat{x}$.
3. Por último una rotación de ángulo ψ alrededor de la nueva posición del eje $\hat{z}$.

Juntando estas tres transformaciones parciales en la forma de un producto matricial, obtenemos la matriz de la transformación completa:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

1.6 Parámetros de Cayley-Klein

Otra manera de representar una transformación ortogonal fue desarrollada por los brillantes matemáticos Arthur Cayley (16 de Agosto de 1821, Richmond, Surrey, Inglaterra - 26 de Enero de 1895, Cambridge, Cambridgeshire, Inglaterra) y Félix Klein (25 de Abril 1849, Düsseldorf, Prussia - 22 de Junio de 1925, Göttingen, Alemania). Esta teoría puede parecer rebuscada a primera vista, pero ha tenido una gran importancia en el desarrollo de la Física en el siglo XX. Básicamente se trata de lo siguiente: Todo vector $\mathbf{r}$ se puede representar en la forma cartesiana (x, y, z), sino también como una matriz 2 x 2 *hermítica* (v.g. $\sigma = \sigma^t$) de traza nula

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}$$

Esta representación es única. Habiendo aceptado a regañadientes esta propuesta, advertimos que una transformación ortogonal del sistema de coordenadas se puede escribir como una operación matricial actuando sobre $\mathcal{R}$, es decir

$$\mathcal{R}' = \sigma \cdot \mathcal{R}$$

donde los coeficientes de

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha_0 + i\alpha_3 & \alpha_2 + i\alpha_1 \\ -\alpha_2 + i\alpha_1 & \alpha_0 - i\alpha_3 \end{bmatrix}$$

definen los cuatro parámetros de Cayley-Klein α_n (n = 0, ..., 3). Estos coeficientes no son independientes entre sí, sino que están relacionados por la condición

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

En términos de los ángulos de Euler se escriben

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = \cos\theta/2 \cdot \cos(\varphi + \psi)/2 & \alpha_1 = -\sin\theta/2 \cdot \cos(\varphi - \psi)/2 \\ \alpha_3 = \sin\theta/2 \cdot \sin(\varphi - \psi)/2 & \alpha_2 = -\cos\theta/2 \cdot \sin(\varphi + \psi)/2 \end{array}$$

En virtud del teorema de Euler, sabemos que toda transformación entre sistemas de coordenadas ortogonales es equivalente a una rotación de ángulo ϕ alrededor de un eje fijo $\hat{n}$. Los parámetros de Cayley-Klein definen esta rotación según

$$\alpha_0 = \cos(\phi/2) \qquad , \qquad \alpha_i = n_i \sin(\phi/2)$$

Este último resultado destaca la importancia de los parámetros de Cayley-Klein en la Dinámica Analítica. Por otra parte, su utilización en Mecánica Cuántica resulta evidente al advertir que la matriz de transformación σ también se suele escribir de la siguiente forma

$$\sigma = \alpha_0 \mathcal{I} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \sigma_i$$

donde

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son las matrices de Pauli utilizadas en Mecánica Cuántica para describir sistemas físicos de espín 1/2.

Un último comentario relevante respecto de esta teoría de Cayley-Klein. El conjunto de las matrices σ forman un grupo, denominado Grupo e**S**pecial (v.g. de determinante unidad) de matrices **U**nitarias en **2** dimensiones, o **SU(2)**. A través de los parámetros de Cayley-Klein este grupo está relacionado con SO(3), de hecho se dice que SU(2) es una *representación* de SO(3). Aunque debe destacarse que no son equivalentes. De hecho, SU(2) cubre SO(3) "dos veces". esto se ve claramente al advertir que al cambiar el ángulo de rotación ϕ por $\phi+2\pi$, la transformación $\mathcal{A}$ permanece inalterada, mientras que los parámetros de Cayley-Klein α_i cambian de signo.

1.7 Coordenadas curvilíneas ortogonales

Hasta ahora sólo nos hemos referido a sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales y a las transformaciones entre ellos por rotación. En ellos un punto del espacio queda determinado por sus distancias x, y y z a tres planos ortogonales entre sí, o planos coordenados. Sin embargo, este sistema de coordendas no es el único ni en ocasiones el más conveniente para describir la evolución de una partícula. Si por ejemplo el cuerpo está limitado a moverse sobre una superficie será más conveniente utilizar un sistema donde una de las coordenadas permanezca inalterada sobre esa superficie. En general, un sistema de coordenadas está caracterizado por una terna u_1, u_2 y u_3 de números reales con una correspondencia biunívoca con las coordenadas cartesianas x, y y z. Por cada punto del espacio pasan tres superficies $u_i(x, y, z) =$ cte. llamadas *superficies coordenadas*. Sus intersecciones son las *líneas coordenadas*, a lo largo de las cuales sólo varía una de las coordenadas u_i. Si alguna de las funciones $u_i(x, y, z) =$ cte. no es lineal, las superficies coordenadas no son todas planas, ni las líneas coordenadas son todas rectas. Se dice entonces que las coordenadas u_1, u_2 y u_3 constituyen un sistema de coordenadas curvilíneas.

Si $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y} + \mathrm{d}z\,\hat{z}$ es un desplazamiento arbitrario sobre una superficie coordenada $u_i(x, y, z) =$ cte., entonces

$$0 = \mathrm{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u_i}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u_i}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \nabla u_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Vemos que el gradiente ∇u_i es normal a la superficie $u_i(x, y, z) =$ cte. Por lo tanto, el versor $\hat{u}_i = h_i\,\nabla u_i$, con $h_i = 1/|\nabla u_i|$, también es normal a la i-ésima superficie coordenada. De manera trivial, la transformación del sistema cartesiano al curvilíneo está dado por

$$\left[\begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{array}\right] = \mathcal{A} \cdot \left[\begin{array}{c} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{array}\right]$$

donde $\mathcal{A}$ está definido por las componentes cartesianas de los versores $\hat{u}_i$, es decir

$$\mathcal{A} = \left[\begin{array}{ccc} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} h_1\,\partial u_1/\partial x & h_1\,\partial u_1/\partial y & h_1\,\partial u_1/\partial z \\ h_2\,\partial u_2/\partial x & h_2\,\partial u_2/\partial y & h_2\,\partial u_2/\partial z \\ h_3\,\partial u_3/\partial x & h_3\,\partial u_3/\partial y & h_3\,\partial u_3/\partial z \end{array}\right]$$

El caso más importante de sistema de coordenadas curvilíneas es aquel en que las tres superficies coordenadas son ortogonales entre sí. Se dice entonces que el sistema de coordenadas curvilíneas es *ortogonal*. Para que ello ocurra, los tres versores $\hat{u}_i$ deben ser ortonormales, de manera tal que forman un triedro rectángulo en cada punto del espacio. En este caso la matriz $\mathcal{A}$ es ortogonal, y por lo tanto, la transformación inversa entre ambos conjuntos de versores está dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \mathcal{A}^t \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix}$$

y la relación entre las componentes de un vector $\mathbf{r}$ en uno y otro sistema de coordenadas es

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Un desplazamiento arbitrario $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y} + \mathrm{d}z\,\hat{z}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathrm{d}x \left(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}\hat{u}_3 \right) \\ &+ \mathrm{d}y \left(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial u_3}{\partial y}\hat{u}_3 \right) \\ &+ \mathrm{d}z \left(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}\hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}\hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial u_3}{\partial z}\hat{u}_3 \right) \end{aligned}$$

y reordenando los términos

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u_i}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u_i}{\partial z}\mathrm{d}z \right) \hat{u}_i$$

o sea

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1\,\mathrm{d}u_1\,\hat{u}_1 + h_2\,\mathrm{d}u_2\,\hat{u}_2 + h_3\,\mathrm{d}u_3\,\hat{u}_3$$

Y en módulo,

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}|^2 = h_1^2\,(\mathrm{d}u_1)^2 + h_2^2\,(\mathrm{d}u_2)^2 + h_3^2\,(\mathrm{d}u_3)^2$$

Este resultado parece ser trivialmente cierto, pero debe tenerse en cuenta que para su deducción utilizamos la ortogonalidad de las coordenadas curvilíneas. Tal como veremos esta última expresión es muy práctica[2] para el cálculo de los parámetros h_i.

1.8 Coordenadas cilíndricas

En este sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, un punto $\mathbf{r}$ se determina por las coordenadas polares (ρ, φ) de su proyección sobre el plano (x, y), y por la

[2]Dependiendo de las coordenadas curvilíneas ortogonales utilizadas, las expresiones para las operaciones vectoriales tales como el gradiente, la divergencia, el rotor ó el laplaciano pueden ser muy complicadas. Sin embargo puede demostrarse que todas ellas dependen sólo de los coeficiente h_i

coordenada z. Las fórmulas de transformación son

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi \qquad z = z$$

y

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan(y/x) \qquad z = z$$

Diferenciando las primeras ecuaciones obtenemos que

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}|^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2\,(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$

y por lo tanto

$$h_\rho = 1 \qquad h_\varphi = \rho \qquad h_z = 1$$

La matriz de transformación se escribe

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.9 Coordenadas esféricas

Estas coordenadas curvilíneas ortogonales son la distancia r del punto $\mathbf{r}$ al origen, el ángulo φ de su proyección sobre el plano (x, y) respecto del eje $\hat{x}$, y el ángulo θ que forma $\mathbf{r}$ con el eje $\hat{z}$. Las fórmulas de transformación son

$$x = r\cos\varphi\,\sin\theta \qquad y = r\sin\varphi\,\sin\theta \qquad z = r\cos\theta$$

y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \varphi = \arctan y/x \qquad \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Diferenciando las primeras ecuaciones obtenemos que

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}|^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2\,\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2$$

y por lo tanto

$$h_r = 1 \qquad h_\varphi = r\sin\theta \qquad h_\theta = r$$

La matriz de transformación se escribe

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \sin\theta\, cos\varphi & \sin\theta\,\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\theta\,\cos\varphi & \cos\theta\,\sin\varphi & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

1.10 Velocidad y aceleración

La *velocidad* de una partícula es la rapidez con que cambia su posición al transcurrir el tiempo

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

A su vez, la velocidad del cuerpo también suele cambiar al trancurrir el tiempo. Entonces se dice que el cuerpo tiene una aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

La posición, la velocidad y la aceleración son entes vectoriales. Sea una trayectoria no constantemente rectilinea y consideremos un arco de ella suficientemente pequeño como para que la variación del radio y de la posición del centro de curvatura sea despreciable. Consideremos además un sistema de coordenadas que acompaña a la partícula, con el origen en ella, un eje de versor $\hat{e}_\parallel$ tangencial a la trayectoria, y otro definido por el versor $\hat{e}_\perp$ que apunta hacia el centro de curvatura. Derivando la velocidad $\mathbf{v} = v\hat{e}_\parallel$ obtenemos la aceleración

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, v\hat{e}_\parallel = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + v\,\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\parallel}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + v\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\perp \\
&= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + v\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\perp = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + \frac{v^2}{r}\,\hat{e}_\perp
\end{aligned}$$

Vemos que la aceleración puede no ser tangente a la trayectoria. Mientras que la componente tangencial representa la variación de la rapidez de movimiento sobre la trayectoria, la componente perpendicular -llamada aceleración centrípeta- representa la variación de la dirección de la velocidad.

Definimos la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ de una partícula de velocidad $\mathbf{v}$ como un vector perpendicular al plano de movimiento y cuya magnitud está dada por la rapidez con que varía el ángulo barrido por el vector posición

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r^2}$$

1.11 Velocidad y aceleración en coordenadas curvilíneas

El cálculo de la velocidad y la aceleración a partir de la variación de las coordenadas de $\mathbf{r}(t)$ es trivial en un sistema cartesiano

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\hat{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\hat{z}$$

$$\mathbf{a} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{y} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{z}$$

En un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, en cambio, los versores pueden rotar con el tiempo. Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_i \nabla u_i) \neq 0$$

y por lo tanto el cálculo de las velocidades y aceleración no es tan simple como en el caso cartesiano.

En coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\mathrm{d}\hat{\rho} = \hat{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \qquad \mathrm{d}\hat{\varphi} = -\,\hat{\rho}\,\mathrm{d}\varphi \qquad \mathrm{d}\hat{z} = \mathrm{d}\hat{z}$$

y en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\hat{r} &= \hat{\theta}\,\mathrm{d}\theta + \hat{\varphi}\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}\hat{\varphi} &= -\,\hat{r}\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi - \hat{\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}\hat{\theta} &= -\,\hat{r}\,\mathrm{d}\theta + \hat{\varphi}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

Dejamos como un ejercicio expresar la velocidad y la aceleración de un punto en estos dos sistemas. Los resultados son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\hat{\rho} + \rho\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\hat{\varphi} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\hat{z} \\
\mathbf{a} &= \left[\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{\rho} + \left[2\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \rho\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\hat{\varphi} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{z} \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{r} + r\,\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\hat{\varphi} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\theta} \\
\mathbf{a} &= \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{r} + \\
&\quad + \left[2\,\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + 2\,r\,\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\hat{\varphi} + \\
&\quad + \left[2\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - r\,\sin\theta\cos\theta\,\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{\theta}
\end{aligned}$$

1.12 Para saber más:

- P. W. Bridgman: *The Logic of Modern Physics*(MacMillan, New York,1927).
  — *The Nature of Physical Theory* (Dover, New York, 1936).

- Rudolf Carnap: *Fundamentación Lógica de la Física* (Ed. Orbis, Buenos Aires, 1985). Título original: *Philosophical foundation of physics* (1966).

- Bureau International des Poids et Mesures: http://www.bipm.fr

- National Institute of Standards and Technology: http://physics.nist.gov

- The Rudolf Carnap page: http://carnap.umd.edu:90/carnap/carnap.html