Capítulo 3

Sistemas de coordenadas rotantes

3.1 Cambio de coordenadas entre sistemas rotantes

Consideremos un sistema de referencia arbitrario O' que se mueve respecto de un sistema inercial O. En el caso de la Tierra, este movimiento incluye -por ejemplo- su rotación alrededor del Sol. También es posible, como de hecho ocurre con la Tierra, que el sistema de referencia no inercial esté rotando respecto al sistema inercial. Consideremos primero esta rotación. El movimiento de traslación lo analizaremos más adelante, y supondremos -por ahora- que los orígenes de ambos sistemas de referencia, inercial O y no inercial O', coinciden. Un vector cualquiera $\mathbf{q}$ puede representarse en cualquiera de ambos sistema de referencia como

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= q_x\hat{\mathbf{x}} + q_y\hat{\mathbf{y}} + q_z\hat{\mathbf{z}} = \\ &= q_{x'}\hat{\mathbf{x}}' + q_{y'}\hat{\mathbf{y}}' + q_{z'}\hat{\mathbf{z}}'\end{aligned}$$

En una clase anterior ya estudiamos las ecuaciones de transformación entre las coordenadas y los versores de ambos sistemas, representadas por la matriz ortogonal $\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}$. Supongamos ahora que este vector depende de un escalar (por ejemplo, el tiempo t) y queremos calcular su derivada $\mathrm{d}\mathbf{q}/\mathrm{d}t$. Pero, ¿cómo hacemos tal cálculo?. No parece una pregunta muy difícil de responder. En principio significa derivar las coordenadas, (q_x, q_y, q_z) ó $(q_{x'}, q_{y'}, q_{z'})$, respectivamente,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}} &= \frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathrm{d}q_y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathrm{d}q_z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{z}} \\ \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O'}} &= \frac{\mathrm{d}q_{x'}}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{x}}' + \frac{\mathrm{d}q_{y'}}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{y}}' + \frac{\mathrm{d}q_{z'}}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{z}}'\end{aligned}$$

Sin embargo, estas dos derivadas sólo coinciden cuando ambos sistemas de referencia no están en movimiento relativo. Claramente, por la misma definición del sistema de referencia inercial, los versores $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ pueden considerarse fijos (a los efectos de un cálculo cinemático). Pero si la matriz de transformación $\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}$ depende del tiempo, entonces no es lícito afirmar lo mismo para los versores $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ y $\hat{\mathbf{z}}'$ del sistema no inercial. Y por lo tanto, el cálculo debe incluir sus derivadas. Es decir

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}} &= \left(\frac{\mathrm{d}q_x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathrm{d}q_y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathrm{d}q_z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{z}}\right) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}q_{x'}}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{x}}' + \frac{\mathrm{d}q_{y'}}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{y}}' + \frac{\mathrm{d}q_{z'}}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{z}}'\right) + \left(q_{x'}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}'}{\mathrm{d}t} + q_{y'}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}'}{\mathrm{d}t} + q_{z'}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{z}}'}{\mathrm{d}t}\right) = \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O'}} + \left(q_{x'}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}'}{\mathrm{d}t} + q_{y'}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{y}}'}{\mathrm{d}t} + q_{z'}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{z}}'}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}
$$

Para completar esta relación entre las derivadas en ambos sistemas de referencia, debemos calcular la derivada temporal de los versores $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{y}}'$ y $\hat{\mathbf{z}}'$. Así,

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\hat{x}'\\ \hat{y}'\\ \hat{z}'\end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}}{\mathrm{d}t}\,\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}}\begin{bmatrix}\hat{x}'\\ \hat{y}'\\ \hat{z}'\end{bmatrix}
$$

Analicemos ahora la matriz[1] $\dot{\mathcal{A}}_{\mathrm{OO'}}\cdot\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}}$. Dado que $\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}\cdot\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}} = \mathcal{I}$, resulta

$$
\dot{\mathcal{A}}_{\mathrm{OO'}}\cdot\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}} = -\,\mathcal{A}_{\mathrm{OO'}}\cdot\dot{\mathcal{A}}_{\mathrm{O'O}} = -\,\mathcal{A}^t_{\mathrm{O'O}}\cdot\dot{\mathcal{A}}^t_{\mathrm{OO'}} = -\,\left(\dot{\mathcal{A}}_{\mathrm{OO'}}\cdot\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}}\right)^t
$$

Vemos que la matriz $\dot{\mathcal{A}}_{\mathrm{OO'}}\cdot\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}}$ es antisimétrica. Escribimos

$$
\dot{\mathcal{A}}_{\mathrm{OO'}}\cdot\mathcal{A}_{\mathrm{O'O}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z'} & -\omega_{y'}\\ -\omega_{z'} & 0 & \omega_{x'}\\ \omega_{y'} & -\omega_{x'} & 0\end{bmatrix}
$$

de forma tal que

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\hat{x}'\\ \hat{y}'\\ \hat{z}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z'} & -\omega_{y'}\\ -\omega_{z'} & 0 & \omega_{x'}\\ \omega_{y'} & -\omega_{x'} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}'\\ \hat{y}'\\ \hat{z}'\end{bmatrix}
$$

El vector $\vec{\omega} = \omega_{x'}\hat{\mathbf{x}}' + \omega_{y'}\hat{\mathbf{y}}' + \omega_{z'}\hat{\mathbf{z}}'$ es ni más ni menos que la velocidad angular instantánea entre ambos sistemas. Consideremos, por ejemplo, un sistema de referencia rotado un ángulo ϕ alrededor del eje $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}'}$. En tal caso, $\hat{\mathbf{x}}' = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{y}}' = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}$. Derivando respecto de t obtenemos

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\left(-\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}\right) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{y}}' = \omega_{z'}\,\hat{\mathbf{y}}' \qquad \text{si } \omega_{x'} = \omega_{y'} = 0
$$

[1] A partir de este punto, comenzamos a utilizar una notación muy usual, v.g. $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = \dot{a}$

Similarmente, para una rotación alrededor del eje $\hat{\mathbf{y}}'$ obtenemos, $\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}'/\mathrm{d}t = -\omega_{y'}\,\hat{\mathbf{z}}'$, Y componiendo ambas rotaciones, obtenemos la expresión anterior para una rotación arbitraria, $\mathrm{d}\hat{\mathbf{x}}'/\mathrm{d}t = \omega_{z'}\,\hat{\mathbf{y}}' - \omega_{y'}\,\hat{\mathbf{z}}'$.

Reemplazando en una ecuación anterior, obtenemos la relación entre las derivadas calculadas en ambos sistemas de referencia.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}} = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'} + \vec{\omega}\times\mathbf{q}$$

Debe advertirse que no realizamos ninguna suposición respecto del vector $\mathbf{q}$. Puede tratarse de -por ejemplo- un vector posición, una velocidad ó una velocidad angular. Por lo tanto, la relación anterior puede pensarse como una relación entre operadores, independiente del vector al que son aplicados.

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'} + \ \vec{\omega}\times$$

Por ejemplo, podemos aplicarlo en forma sucesiva para obtener la relación entre las derivadas segundas,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathrm{O}} &= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'} + \ \vec{\omega}\times\right)\cdot\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'} + \ \vec{\omega}\times\right) = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathrm{O}'} + \ 2\,\vec{\omega}\ \times \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'}\times + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\end{aligned}$$

Si lo aplicamos al vector posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de una partícula de masa m sometido a una fuerza $\mathbf{F}$, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento en el sistema no inercial O',

$$\mathbf{F} = m\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathrm{O}} \ = \ m\left[\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathrm{O}'} + \ 2\,\vec{\omega}\ \times\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{O}'}\times\mathbf{r} + \ \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\mathbf{r}\right]$$

Esta ecuación nos permite resolver un problema mecánico desde un sistema de referencia no inercial en base a las ecuaciones de Newton, siempre que incorporemos tres fuerzas ficticias en la segunda ecuación de Newton:

$$m\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathrm{O}'} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{coriolis}} + \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} + \mathbf{F}_{\text{aceleración}}$$

donde

$$\begin{array}{lll}\mathbf{F}_{\text{coriolis}} & = -2\,m\,\vec{\omega}\ \times\dot{\mathbf{r}} & \text{Fuerza de Coriolis} \\ \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} & = -\,m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}) & \text{Fuerza centrífuga} \\ \mathbf{F}_{\text{aceleración}} & = m\,\mathbf{r}\times\dot{\vec{\omega}} & \end{array}$$

3.2 La fuerza de Coriolis

Junto con Poncelet y Navier, Coriolis fue uno de los creadores del concepto de "trabajo" que analizaremos más adelante. Sin embargo, hoy es más recordado por un tratado publicado en 1835 con el nombre de *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*, en el cual demostraba la presencia en sistemas rotantes de la fuerza ficticia que hoy lleva su nombre:

$$\mathbf{F}_{\text{coriolis}} \;= -2\, m\, \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \qquad \text{Fuerza de Coriolis}$$

Para comprender el origen de esta fuerza es conveniente considerar, como primer ejemplo, el movimiento de un satélite transpolar. Visto desde un sistema inercial, este satélite describe un movimiento circular alrededor de la Tierra, pasando por los polos. En una primera aproximación, la única fuerza aplicada sobre el satélite apunta hacia el centro de la Tierra. Sin embargo, un observador en la base norteamericana en el polo sur, verá que en lugar de atravesar el cielo en una trayectoria rectilínea y uniforme, el satélite sigue una trayectoria curvada hacia la izquierda. Por el contrario, un observador en el polo norte verá que esta desviación es hacia la derecha. Para poder explicar este movimiento en base a la segunda ley de Newton, ambos observadores deberán suponer que esta trayectoria es el resultado de una fuerza aplicada sobre el satélite. Esta es justamente la fuerza de Coriolis.

Consideremos un objeto moviéndose sobre la superficie de la Tierra en una colatitud θ. Ubicamos los ejes de nuestro sistema de coordenadas no inercial de la siguiente manera:

$\hat{\mathbf{x}}$	hacia el este
$\hat{\mathbf{y}}$	hacia el norte
$\hat{\mathbf{z}}$	hacia arriba

La velocidad angular es, entonces, $\vec{\omega} = \omega\,(\sin\theta\;\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}})$, y la fuerza de Coriolis está dada por

$$\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = -2\, m\, \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = 2m\omega\;\left((\dot{y}\cos\theta - \dot{z}\sin\theta)\,\hat{\mathbf{x}} - \dot{x}\cos\theta\;\hat{\mathbf{y}} + \dot{x}\sin\theta\;\hat{\mathbf{z}}\right)$$

3.2.1 El efecto Larmor

Una partícula de carga q moviéndose en presencia de un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ experimenta una fuerza proporcional a su velocidad y perpendicular a ella,

$$\mathbf{F}_{\text{magnética}} = q\;\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

Si consideramos el desplazamiento de esta partícula, pero visto desde un sistema de referencia rotante con velocidad angular $\vec{\omega}$, tenemos que

$$\mathbf{F}_{\text{magnética}} = q\;\left(\dot{\mathbf{r}} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}\right) \times \mathbf{B}\;.$$

La ecuación de movimiento de la partícula en presencia de este campo magnético y de una fuerza arbitraria $\mathbf{f}$ se escribe

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{f} + \mathbf{F}_{\text{magnética}} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} - m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{f} - (q\,\mathbf{B} + 2m\vec{\omega}) \times \dot{\mathbf{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} - (q\,\mathbf{B} + m\vec{\omega}) \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

Vemos que se da una interesante relación, ya que la fuerza producida por un campo magnético tiene componentes con precisamente la misma forma que la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga. Si elegimos

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{2m}\,\mathbf{B}$$

podemos anular el primer término, y reducir el último a la mitad, resultando

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} + \frac{q}{2}\,\dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{r} + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \mathbf{B} \times \mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

Consideremos ahora que el campo magnético es suficientemente débil, como para que el término cuadrático sea despreciable frente a la fuerza aplicada $\mathbf{f}$. También supondremos que su dependencia temporal es suficientemente suave como para poder despreciar el segundo término. Si se cumplen tales condiciones obtenemos

$$m\ddot{\mathbf{r}} \approx \mathbf{f}$$

Pero esta es justamente la ecuación de movimiento en ausencia del campo magnético. La conclusión que obtenemos de este resultado es que, visto desde un sistema inercial, el efecto de un campo magnético débil es producir una lenta precesión de la trayectoria con una velocidad angular $\vec{\omega}$. Esta frecuencia angular

$$\omega_{\mathrm{L}} = \frac{qB}{2m}$$

se denomina *frecuencia de Larmor*, en honor del descubridor de este efecto, el físico irlandés Joseph Larmor.

El efecto Larmor produce cambios observables en los espectros de emisión por átomos en presencia de campos magnéticos, debido a la modificación que producen en los momentos angulares de los niveles atómicos. Este cambio de las líneas espectrales se denomina “efecto Zeeman”.

3.3 Fuerza centrífuga

La fuerza centrífuga

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} &= -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= -m\,(\vec{\omega} \cdot \mathbf{r})\,\vec{\omega} - \omega^2\,\mathbf{r} \end{aligned}$$

es normal tanto al eje de rotación $\hat{\omega}$ como a la velocidad tangencial $\vec{\omega} \times \mathbf{r}$. Como además el signo es positivo, esta fuerza aparente es normal al eje de rotación y dirigida hacia afuera, de allí el nombre de centrífuga.

En la Tierra, esta fuerza es nula en los Polos y máxima en el Ecuador, donde toma un valor de aproximadamente 0.0034 m / seg^2. En realidad, la diferencia entre la aceleración de la gravedad en los Polos respecto del Ecuador es aproximadamente de 0.052 m / seg^2, lo que se debe a que la Tierra no es una esfera perfecta sino que está achatada en los Polos. De hecho, el radio en el Ecuador es aproximadamente 21 kilómetros mayor que en los Polos. Estos dos efectos no son independientes, ya que el achatamiento de la Tierra en los Polos es consecuencia de su rotación. Además, la fuerza centrífuga produce una desviación de la gravedad *aparente* en un ángulo igual a

$$\alpha \approx \frac{F_{\text{horizontal}}}{F_{\text{vertical}}} = \frac{m\omega^2 r \sin\theta\cos\theta}{mg - m\omega^2 r \sin^2\theta} \approx \frac{\omega^2 r}{g} \sin\theta\cos\theta$$

que toma su valor máximo para $\theta = 45^o$, y que es igual a aproximadamente 6 minutos de arco.