Capítulo 4

Sistemas de coordenadas en movimiento relativo

4.1 Sistemas de coordenadas acelerados y Principio de Equivalencia

Para completar la descripción de los sistemas de coordenadas no inerciales, consideremos uno cuyo origen O' está ubicado en una posición $\mathbf{R}$ respecto del origen O de un sistema inercial. Supondremos que este vector varía con el tiempo según una ley arbitraria $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathrm{O'O}}(t)$. La transformación de coordenadas que analizaremos ahora se agrega -eventualmente- a la correspondiente a cualquier rotación que esté ejecutando el sistema de referencia no inercial. Consideremos una partícula de masa m sometida a una fuerza $\mathbf{F}$. Su posición está representada por un vector $\mathbf{r}_{\mathrm{O}}$ en el sistema inercial y otro vector $\mathbf{r}_{\mathrm{O'}}$ en el sistema no inercial. Ambos vectores posición están relacionados por la relación vectorial

$$\mathbf{r}_{\mathrm{O}} = \mathbf{r}_{\mathrm{O'}} + \mathbf{R}_{\mathrm{O'O}}(t)$$

Derivando dos veces respecto del tiempo, obtenemos

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O}} = \ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O'}} + \ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O'O}}(t)$$

Y reemplazando en la segunda ecuación de Newton,

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O'}} = \mathbf{F} - m\,\ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O'O}}(t)$$

Al igual que en el caso de las rotaciones, esta ecuación nos permite resolver un problema mecánico desde un sistema de referencia acelerado, en base a las ecuaciones de Newton, siempre que incorporemos una fuerza ficticia en la segunda ecuación de Newton:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{O'}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{aceleración}}$$

donde

$$\mathbf{F}_{\text{aceleración}} = -\, m\, \ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O'O}}(t)$$

Un observador que insistiera en que su sistema de referencia es inercial, a pesar de la evidencia de que existe una fuerza $\mathbf{F}_{\text{aceleración}} = -\, m\, \ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O'O}}(t)$ aplicada sobre todo sistema, aún podría defender su postura si postula la existencia de un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -\, \ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{O'O}}(t)$. Esta idea representa lo que se conoce como "Principio de equivalencia", estableciendo la semejanza entre aceleración y gravedad. En realidad, lo que se está planteando con este principio es algo bien extraño: Que la masa que entra en la definición de la fuerza gravitatoria $m\mathbf{g}$, llamada masa gravitatoria, y la que entra en la segunda ecuación de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, llamada masa inercial. Tal como veremos más adelante, la igualdad de estas dos masas ya era conocida por Galileo y Newton, pero no fue sino hasta el siglo XX cuando Albert Einstein vio en ella la clave de su Teoría General de la Relatividad. Durante los últimos años del siglo XX hubo mucho interés en investigar la posible violación de esta igualdad. Un descubrimiento de tal tipo tendría un claro carácter revolucionario, ya que no sólo pondría en entredicho toda la teoría de Einstein, sino gran parte de la Mecánica Clásica de Newton.

4.2 Invariancia de Galileo

Vemos que si el centro del sistema O' no está acelerado respecto del sistema O, es decir si el movimiento *relativo* es "rectilineo y uniforme", $\mathbf{R}_{\mathrm{O'O}}(t) = \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\mathrm{O'O}} \cdot t$, entonces las ecuaciones de Newton son válidas en el sistema O'. Esta es ni más ni menos que una de las conclusiones que en el capítulo anterior extrajimos de la definición de sistema inercial: "Todo sistema de referencia que se mueve con velocidad constante respecto de un sistema inercial, es también inercial".

Si no hay una rotación involucrada en la transformación siempre podemos redefinir los ejes cartesianos y el origen del tiempo t de manera que $\mathbf{b} = 0$, y de manera que el movimiento relativo sea a lo largo de uno de los ejes; por ejemplo, $\mathbf{v}_{\mathrm{O'O}} = v\,\hat{\mathbf{x}}$. En tal caso, la transformación entre ambos sistemas de coordenadas se escribe

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Esta transformación se denomina *Transformación de Galileo.* Vemos que el elemento de longitud es el mismo en ambos sistemas, $\mathrm{d}s^2 = \sum_j \mathrm{d}x_j^2 = \sum_j \mathrm{d}x'^2_j = \mathrm{d}s'^2$. Además, tal como vimos, la forma de la ecuación de movimiento es la misma en ambos sistemas de referencia,

$$\mathbf{F} = m\,\ddot{\mathbf{r}} = m\,\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}'$$

Este hecho se suele enunciar diciendo que la segunda ecuación de Newton es *invariante* ante las transformaciones de Galileo. Cada término individual puede variar, pero todos transforman según el mismo esquema (v.g. son *covariantes*), manteniendo la forma de la ecuación. El hecho de que las leyes de Newton sean idénticas en ambos sistemas de referencia se denomina *Principio de relatividad newtoniana* ó *Invariancia de Galileo.*

4.3 Transformación de Lorentz

Si volvemos a la relación entre las coordenadas de dos sistemas inerciales en movimiento relativo,

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

parece haber poco espacio para una transformación distinta a la de Galileo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En tren de dudar de todo, podemos cuestionar la linealidad de esta transformación. Es posible dar varios argumentos de plausibilidad para esta suposición, pero no nos detendremos en ellos en este momento. Veremos, en cambio, que podemos argumentar respecto de los coeficientes de la matriz

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En primer lugar, parece muy razonable suponer que un evento que ocurre sobre el eje x en el sistema O, también ocurrirá en el mismo eje cuando se lo observa desde el sistema O'. En otras palabras, y' y z' deben ser -al menos- proporcionales a las coordenadas y y z, respectivamente, v.g. $y' = a_{22}y$ y $z' = a_{33}z$, con independencia de las otras coordenadas y el tiempo. Tenemos, entonces

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ahora, si realizamos una rotación de ambos sistemas de coordenadas alrededor de los ejes $\hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{z}'}$, tendríamos que ver desde O lo que antes veíamos desde O'. Es decir que, la misma matriz $\mathcal{A}$ tendría que caracterizar a la transformación inversa

$$\begin{bmatrix} t \\ -x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} t' \\ -x' \\ -y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Por lo tanto, $-y = a_{22}(-y') = a_{22}(-a_{22}y)$, por lo cual $a_{22} = \pm 1$. Pero como esta transformación también tiene que poder aplicarse al caso en que no hay movimiento relativo, debemos descartar la posibilidad $a_{22} = -1$. El mismo razonamiento puede emplearse para mostrar que $a_{33} = 1$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasta ahora, basándonos en unos pocos argumentos plausibles, hemos recuperado la transformación de Galileo para las coordenadas transversales al movimiento relativo. Veamos ahora que podemos decir respecto de la coordenada x. En primer lugar, podemos plantear que un evento que ocurre en $x' = 0$, deberíamos verlo en el sistema O, como ocurriendo en $x = vt$. Es decir que

$$\begin{bmatrix} t' \\ 0 \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} t \\ vt \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

O sea que

$$0 = a_{10}t + a_{11}vt + a_{12}y + a_{13}z$$

Y para que esto ocurra, independientemente de y, z y t, es razonable suponer que $a_{12} = a_{13} = 0$ y $a_{10} = -a_{11}v$, o sea

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ -a_{11}v & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y aplicando nuevamente la simetría **??**, obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt) \\ -x &= a_{11}(-x' - vt') \end{aligned}$$

Eliminando x' de ambas ecuaciones, resulta la siguiente expresión para t',

$$t' = a_{11}\left(t + \frac{1-a_{11}^2}{a_{11}^2}\,\frac{x}{v}\right)$$

Tenemos entonces la siguiente transformación:

$$\mathcal{A} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & (1-a_{11}^2)/a_{11}^2 v & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sólo nos queda por determinar el factor a_{11}. Parece muy razonable asumir que la longitud debe permanecer invariante al pasar de un sistema inercial a otro. Si aplicamos la transformación

$$\mathrm{d}s'^2 = \sum_j \mathrm{d}x'^2_j = a_{11}^2 \sum_j \mathrm{d}x'^2_j = a_{11}^2\,\mathrm{d}s^2$$

estaríamos obligados a asumir que $a_{11} = 1$, recuperando así la transformación de Galileo. Pero sabemos que esta transformación no deja invariante a las ecuaciones del Electromagnetismo. Y es aquí donde Einstein plantea un principio adicional. En sus propias palabras, “toda [su] Teoría se basa en dos postulados”

1. Las leyes de la Física tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales.
2. En todos los sistemas inerciales, la velocidad de la luz c es la misma ya sea que la luz es emitida por un cuerpo en reposo o por un cuerpo en movimiento uniforme.

Este último es uno de los principales resultados que se derivan de las ecuaciones de Maxwell. Aplicado a la transformación $\mathcal{A}$, a un frente de luz que se mueve en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$, obtenemos que

$$\begin{bmatrix} t' \\ ct' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{A}\begin{bmatrix} t \\ ct \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ó sea

$$\begin{aligned} t' &= a_{11}\left(t + \frac{1-a_{11}^2}{a_{11}^2}\,\frac{ct}{v}\right) \\ ct' &= a_{11}(ct - vt) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Resulta así la transformación de Lorentz, caracterizada por la matriz

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{bmatrix} 1 & -v/c^2 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este resultado básico de la Teoría Restringida o Especial de la Relatividad da lugar a un gran número de efectos no intuitivos que han sido verificados experimentalmente, como la contracción FitzGerald-Lorentz de las longitudes ó la dilatación temporal.

Vemos que en el límite $v \ll c$ se recupera la transformación de Galileo, estableciendo un límite para la validez de la Mecánica Clásica que estamos desarrollando en este curso.