Capítulo 5

Leyes de conservación

5.1 Introducción

5.2 Conservación de la cantidad de movimiento

Ya hemos estudiado esta ley de conservación en el capítulo anterior. Para un sistema de N partículas definimos el impulso total como

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre la i-ésima partícula. A diferencia del caso de una partícula, aquí debemos distinguir entre las fuerzas producidas por agentes externos al sistema, y las fuerzas de acción y reacción entre las mismas partículas del sistema. De esta manera tenemos para la partícula i que

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}$$

donde, naturalmente, $\mathbf{F}_{ii} = 0$. Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i} \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij}$$

Las fuerzas internas se equilibran de a pares (Ley de acción y reacción). Por lo tanto obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$$

donde $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{\mathrm{ext}}$ es la resultante de todas las fuerzas "externas" aplicadas sobre el sistema. Vemos entonces que si $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = 0$, $\mathbf{P} =$ constante, es decir

> Para un sistema de partículas en única y exclusiva interacción mutua, la cantidad de movimiento total se conserva.

5.3 Centro de masa

Si las masas m_i de las partículas individuales no varían,

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \\ &= M\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{cm}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

donde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ es la masa total del sistema y

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i$$

señala un punto del espacio que llamaremos *centro de masa* del sistema. Vemos que la cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa. O sea que el centro de masa se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en él y todas las fuerzas externas se aplicaran en ese punto. Si no actuan fuerzas externas, la velocidad del centro de masa es constante y se lo puede utilizar como base de un sistema de referencia inercial.

5.4 Problema equivalente de un cuerpo

La anterior definición del centro de masa no es simplemente anecdótica, sino que permite lograr una muy importante simplificación del problema de varias partículas.

Para un sistema de N partículas aisladas en interacción mútua, las ecuaciones de Newton

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ij}$$

con $\mathbf{F}_{ii} = 0$, representan un sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Las $6N$ constantes que definen su solución están dadas por las componentes de las posiciones y velocidades iniciales de todas las partículas. Siendo que el sistema está aislado, el movimiento "rectilineo y uniforme" de su centro de masa $\mathbf{r}_{cm}$ está completamente determinado por la condición inicial. Esto hace que las 3 relaciones entre las $3N$ coordenadas del sistema, dadas por la definición del centro de masa $\mathbf{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{N}(m_i/M)\,\mathbf{r}_i$, permita reducir a $3N-3$ el número de variables independientes del sistema. Así, el caso de una sola partícula aislada es trivial, y el caso de dos partículas puede -tal como veremos en un momento- reducirse a un problema equivalente de un cuerpo.

En efecto, consideremos un sistema de 2 partículas aisladas en interacción mutua por una fuerza que, en principio, sólo puede ser función de la posición relativa entre ambas partículas $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, de sus derivadas y, eventualmente, el tiempo, $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ldots, t)$. Las posición relativa $\mathbf{r}$ y la del centro de masa $\mathbf{r}_{cm}$ permiten describir completamente el estado del sistema.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} \\
\mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm}
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{r}_{cm}$ es conocido, sólo necesitamos encontrar $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Para ello escribimos la segunda ley de Newton para una de las partículas, digamos la partícula 1,

$$\mathbf{F} = m_1 \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2}$$

Ahora reemplazamos la expresión anterior para $\mathbf{r}_1$

$$\mathbf{F} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} + m_1\,\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{cm}}{\mathrm{d}t^2}$$

Finalmente, como $\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{cm}/\mathrm{d}t^2 = 0$, obtenemos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ldots, t) = \mu\,\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

donde hemos definido la "masa reducida"

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

Trabajando sobre la segunda ley de Newton para la partícula 2 arribaríamos a exactamente la misma ecuación.

Vemos que la ecuación anterior coincide con la segunda ley de Newton para una sola partícula a una distancia $\mathbf{r}$ de un centro de fuerzas "fijo" y de masa μ.

Por esta reducción a un problema equivalente de una partícula, el problema de dos cuerpos es resoluble. En cambio, para $N > 2$, y salvo en casos muy particulares, la solución del problema es imposible analíticamente. Más adelante volveremos sobre este asunto.

5.5 Trabajo y energía

En la práctica, el desplazamiento de los cuerpos se realiza bajo la acción de fuerzas. De ello surge la necesidad de caracterizar la acción de las fuerzas relacionadas con dichos movimientos. Volvamos entonces a nuestro "problema piloto" de dos partículas aisladas en interacción mutua. Esta interacción está caracterizada por una fuerza $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}$. Como antes, anotamos con $\mathbf{r}$ al vector posición de la partícula 1 respecto de la partícula 2.

Definimos el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ entre una configuración inicial a y otra final b como la integral de línea

$$W = \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r}$$

a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Aplicando la tercera ley de Newton ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) podemos reescribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \mathbf{F}_{12}.\mathrm{d}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= \int_a^b \mathbf{F}_{12}.\mathrm{d}\mathbf{r}_1 + \int_a^b \mathbf{F}_{21}.\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b m_1 \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}\mathbf{r}_1 + \int_a^b m_2 \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \\ &= m_1 \int_a^b \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t}.\mathbf{v}_1\,\mathrm{d}t + m_2 \int_a^b \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t}.\mathbf{v}_2\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Big|_b - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Big|_a \right) + \left(\frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Big|_b - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Big|_a \right) \\ &= (T_1 + T_2)_b - (T_1 + T_2)_a \end{aligned}$$

donde hemos definido la *energía cinética* $T = \frac{1}{2}mv^2$. El resultado anterior puede enunciarse como que el trabajo realizado para pasar de una configuración a a otra b es igual a la correspondiente variación de la energía cinética $T_1 + T_2$.

5.6 Fuerzas conservativas

Supongamos que el trabajo realizado por una fuerza en un circuito cerrado cualquiera -donde volvemos a la misma configuración inicial- es nulo. Su capacidad para realizar trabajo se ha conservado. Decimos que dicha fuerza es *conservativa*. En virtud de los teoremas fundamentales de las integrales curvilineas, podemos expresar esta condición en una forma más abstracta (y por ello más útil), indicando que una fuerza **F** es conservativa si y sólo si es gradiente de una cierta función escalar V,[1]

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

que llamaremos *energía potencial*. El signo es convencional. Vemos además que V está definida a menos de una constante aditiva arbitraria.

Volvamos entonces a nuestro sistema de dos partículas y supongamos que la fuerza de interacción entre ambas es conservativa respecto de la posición relativa, $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$.

El trabajo realizado por dicha fuerza es

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= -\int_a^b \nabla V(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r} \\ &= -(V_a - V_b) \end{aligned}$$

Reemplazando W_{ab} por su expresión en términos de la energía cinética, encontramos finalmente que $(T_1 + T_2 + V)_a = (T_1 + T_2 + V)_b$. Esto lo expresamos diciendo que la energía total

$$E = T_1 + T_2 + V$$

se conserva.

Todavía nos falta un paso para llegar a la ley de conservación tal como la expresó Huygens al decir que

> La suma de los productos resultantes de multiplicar la masa de cada cuerpo duro por el cuadrado de su velocidad, es la misma antes y después del choque.

¿Dónde está el potencial en esta ley?. Ocurre que mucho antes y mucho después de una colisión, las partículas están infinitamente separadas una de otra. Por lo tanto $V = 0$ y la energía cinética es la misma.

[1] También se suele expresar en el sentido de que el rotor de la fuerza es nulo, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

5.7 ¿De quién es la energía potencial?

Una última e importante aclaración: En general muchos libros de texto hablan de la energía potencial de una partícula, cuando -por lo que sabemos hasta ahora- la energía potencial asociada a una interacción es una propiedad del par de partículas sobre la cual actúa, y no de uno u otro cuerpo. Tampoco tiene sentido asignar parte de la energía potencial a uno y parte a otro.

Por ejemplo, volvamos por enésima vez a nuestro ejemplo de la interacción entre dos partículas aisladas. Supongamos que decidimos definir la energía total de la partícula 1 como $E_1 = T_1 + V$. Vemos entonces que dicha energía total $E_1 = E - T_2$ de la partícula 1 no se conserva a pesar de que sobre ella sólo actúa una fuerza conservativa (!).

Sin embargo, es muy común trabajar con la energía de una partícula y decir que ésta se conserva, pero esto está conceptualmente equivocado. Sólo puede justificarse con ciertas reservas en dos casos particulares:

5.7.1 Energía cinética del problema equivalente de un cuerpo

Para analizar el primero de estos dos casos, calculamos la energía cinética de un par de partículas en términos de las velocidades del centro de masa $\mathbf{v}_{cm}$ y de la coordenada relativa $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,\mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm} \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm}\end{aligned}$$

Remplazando en las expresión para la energía cinética, obtenemos, después de un poco de álgebra,

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{m_2}{M}\left(\frac{1}{2}\mu v^2\right) + \frac{m_1}{M}\left(\frac{1}{2}M v_{cm}^2\right) + \mu\mathbf{v}.\mathbf{v}_{cm} \\ T_2 &= \frac{m_1}{M}\left(\frac{1}{2}\mu v^2\right) + \frac{m_2}{M}\left(\frac{1}{2}M v_{cm}^2\right) - \mu\mathbf{v}.\mathbf{v}_{cm}\end{aligned}$$

donde $M = m_1 + m_2$ y $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ son las masas total y reducida del sistema. Sustituimos estas expresiones en la energía total del sistema

$$\begin{aligned}E &= T_1 + T_2 + V \\ &= \frac{1}{2}M v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + V\end{aligned}$$

Como la velocidad del centro de masa v_{cm} es constante, podemos eliminar el primer término en la energía (que está definida a menos de una constante arbitraria), escribiendo

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r)$$

Vemos que esta energía caracteriza a una partícula "ficticia" de masa reducida μ moviéndose en un campo de energía potencial $V(r)$. Esto permite justificar el uso de una terminología donde se habla de la energía total de una partícula y decir que esta se conserva. Pero debemos recordar que esto es una abstracción referida a una partícula "ficticia" representativa de un sistema de dos cuerpos en interacción mutua.

5.7.2 Energía de un sistema de dos cuerpos de masas muy distintas

Supongamos ahora que la partícula 2 tiene una masa mucho mayor que la partícula 1, $m_2 \gg m_1$. La ley de conservación de la cantidad de movimiento muestra que en una interacción entre ambas partículas

$$\Delta \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\,\Delta \mathbf{v}_1$$

O sea la partícula más pesada prácticamente no modifica su velocidad a orden m_1/m_2. Esto suena razonable, si imaginamos -por ejemplo- que la Tierra no debería modificar su velocidad por su interacción gravitatoria con un objeto muy pequeño.

Como el centro de masa coincide prácticamente con el cuerpo más pesado

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} \approx \mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} + \mathrm{o}(m_1/m_2) \\
\mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathbf{r} + \mathbf{r}_{cm} \approx \mathbf{r}_{cm} + \mathrm{o}(m_1/m_2)
\end{aligned}$$

la posición de éste define un sistema aproximadamente inercial donde la energía reducida

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r) \approx \frac{1}{2}m_1 v^2 + V(r) + \mathrm{o}(m_1/m_2)$$

puede interpretarse como característica de la partícula 1 de posición $\mathbf{r}$ y velocidad $\mathbf{v}$.

Este resultado sólo puede interpretarse correctamente como una aproximación del problema equivalente de un cuerpo. Como m_2 es mucho mayor que m_1, su inercia es tan grande que difícilmente recibe algo de la energía cinética. Partiendo de las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{m_2}{M}\left(\frac{1}{2}\mu v^2\right) + \frac{m_1}{M}\left(\frac{1}{2}M v_{cm}^2\right) + \mu \mathbf{v}.\mathbf{v}_{cm} \\
T_2 &= \frac{m_1}{M}\left(\frac{1}{2}\mu v^2\right) + \frac{m_2}{M}\left(\frac{1}{2}M v_{cm}^2\right) - \mu \mathbf{v}.\mathbf{v}_{cm}
\end{aligned}
$$

obtenemos que, en el sistema centro de masa (es decir, para $\mathbf{v}_{cm} = 0$),

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{m_2}{M} T \approx T \\
T_2 &= \frac{m_1}{M} T \approx 0
\end{aligned}
$$

y por lo tanto la partícula más pesada apenas recibe algo de la energía cinética.

5.8 Teorema del Virial

Antes de terminar, quisiera repasar la demostración de un teorema que, ahora les podrá parecer algo *descolgado*, pero que adquirirá gran importancia en otros cursos, sobre todo en Mecánica Estadística.

Volvamos, como siempre, a nuestro problema de dos partículas aisladas en interacción mutua. Trabajando un poco sobre la energía cinética, tenemos que

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\,\mu\, v^2 = \frac{1}{2}\,\mu\,\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\,\mu\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mu\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{r} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\,\mu\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

Promediando durante un lapso T, obtenemos

$$
< T >= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2}\mu\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\Big|_{t=T} - \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}\Big|_{t=0}\right) - \frac{1}{2} < \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} >
$$

Supongamos ahora que ambas partículas realizan un movimiento periódico de orbitación, de manera que después de un cierto tiempo T, que denominamos *período*, se vuelve a repetir la configuración inicial. En dicho caso, obtenemos

$$
< T >= -\frac{1}{2} < \mathbf{F}\cdot\mathbf{r} >
$$

Tomando un tiempo T suficientemente grande, se obtendría el mismo resultado, aún cuando el movimiento no sea periódico, siempre que la distancia $\mathbf{v}$ y velocidad relativa $\mathbf{v}$ se conserven finitas, de manera que la cantidad $\mu\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/2$ se mantenga acotada. La ecuación anterior se denomina “teorema del virial”, y el segundo miembro “virial de Clausius”. Aquí lo demostramos para un sistema de dos partículas, pero puede generalizarse fácilmente para un sistema con un número arbitrario de partículas

$$< T >= -\frac{1}{2}\sum_i < \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i >$$

Volviendo a nuestro problema de dos partículas aisladas, suponemos que la fuerza $\mathbf{F}$ es conservativa (o sea derivable de una energía potencial $\mathbf{F} = -\nabla V$, y central, es decir que su dirección coincide con la del vector posición $\mathbf{r}$. En este caso, podemos escribir

$$< T >= \frac{1}{2} < \frac{\partial V}{\partial r} r >$$

Finalmente, si V es una función potencial de r de la forma $V = kr^n$, resulta

$$< T >= \frac{n}{2} < V >$$

En el caso especialísimo una fuerza que, como la gravitatoria ó electrostática, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, n es igual a -1, y por lo tanto

$$< T >= -\frac{1}{2} < V >$$

...