Capítulo 6

Impulso Angular

6.1 Conservación del impulso angular

Volvamos a nuestro sempiterno problema de la colisión de dos partículas aisladas. Nuestro objetivo es encontrar una tercera ley de conservación, relacionada con la velocidad areolar definida por Kepler. Para ello definimos el momento cinético (ó angular) $\mathbf{L_{i0}}$ de cada una de ambas partículas de cantidad de movimiento $\mathbf{p}_i$ y posición $\mathbf{r}_i$ con respecto a un sistema inercial 0 arbitrario como

$$\mathbf{L}_{i0} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

Definimos la cantidad de movimiento total del sistema $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{10}+\mathbf{L}_{20}$. Su variación temporal está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_0}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2) \\
&= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_1 \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} + \mathbf{r}_2 \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} \\
&= 0 + 0 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}
\end{aligned}$$

La cantidad

$$\mathbf{M}_{i0} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

se denomina momento de la fuerza neta aplicada a la partícula i respecto del punto 0. Para cada partícula individual podemos escribir que $\mathrm{d}\mathbf{L}_{i0}/\mathrm{d}t = \mathbf{M}_{i0}$. Como la acción y la reacción de la interacción entre ambas partículas son iguales en magnitud y de sentido opuesto, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_0}{\mathrm{d}t} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} \\
&= \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Vemos que el momento de la fuerza total es independiente del centro de momentos. Para obtener este resultado hemos utilizado la tercera ley de Newton que establece que la acción sobre una de las partículas es igual en magnitud y de sentido opuesto a la reacción en la otra partícula, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Sin embargo, debemos recordar que esta ley no dice nada respecto de la *dirección* de esta interacción. Si además la interacción entre ambas partículas es central, entonces el momento de fuerza es nulo y el impulso angular se conserva. Este resultado se puede extender inmediatamente para un sistema de N partículas aisladas en interacción mutua por medio de fuerzas centrales, indicando que el impulso angular total

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

se conserva.

6.2 Impulso angular intrínseco

Comúnmente, se interpreta la conservación del impulso angular de un sistema de dos partículas

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$$

en el sentido de que el movimiento del sistema se mantiene en un plano perpendicular a $\mathbf{L}_0$. Este es un concepto peligrosamente incorrecto, o al menos poco preciso.

Para explicar esto más claramente, escribimos el impulso angular en términos de las coordenadas del sistema centro de masa

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0 &= \mathbf{L}_{10} + \mathbf{L}_{20} \\
&= \mathbf{r}_1 \times m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm} \right) + \mathbf{r}_2 \times m_2 \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} + \mathbf{v}_{cm} \right) \\
&= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mu \mathbf{v} + (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) \times \mathbf{v}_{cm} \\
&= \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} + \mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{v}_{cm}
\end{aligned}$$

Vemos que, tal como ocurrió con la energía cinética, hemos separado el impulso angular en dos términos. Uno es un impulso angular "intrínseco" al sistema

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}$$

independiente del punto 0, y equivalente al de una partícula de masa reducida μ con vector posición $\mathbf{r}$. Otro es referido al movimiento del sistema de dos partículas como un todo respecto del punto 0. Este último término es equivalente al de una partícula de masa $M = m_1 + m_2$ localizada en el centro de masa. Si escribimos $\mathbf{r}_{cm} = \mathbf{b}_{cm} + \mathbf{v}_{cm}t$, con $\mathbf{b}_{cm}$ una constante arbitraria fijada por la condición inicial, obtenemos

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times \mu\mathbf{v} + \mathbf{b}_{cm} \times M\mathbf{v}_{cm}$$

Vemos que el último término es constante. O sea que el impulso angular intrínseco $\mathbf{l}$ se conserva. Ahora si, podemos interpretar este resultado en el sentido de que la coordenada relativa $\mathbf{r}$ debe mantenerse en un mismo plano ¡con el centro de masa!. Como las posiciones relativas de ambas partículas respecto del centro de masa, son proporcionales a $\mathbf{r}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{cm} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{cm} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \end{aligned}$$

Vemos que ambas partículas se deben mover en un mismo plano con el centro de masa. Pero este plano se puede mover respecto de un sistema inercial arbitrario 0 con velocidad $\mathbf{v}_{cm}$. Y respecto de este sistema de referencia, las partículas ya no siguen trayectorias coplanares.

6.3 Conservación de la velocidad areolar

En el sistema centro de masa, el vector posición de cada partícula $\mathbf{r}'_i$ recorre el plano de movimiento barriendo un área -por unidad de tiempo- dada por

$$\delta\mathbf{A}_i = \frac{1}{2}\mathbf{r}'_i \times \delta\mathbf{r}'_i = \frac{\mu^2}{2m_i^2}\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}$$

Por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu^2}{2m_i^2}\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{\mu}{2m_i^2}\mathbf{l}$$

O sea que la constancia del impulso angular intrínseco nos indica que el vector posición de cada partícula respecto del centro de masa barre áreas iguales en tiempos iguales. Más aún, la variación de las áreas recorridas por los vectores posición de ambas partículas verifican que

$$m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}_2}{\mathrm{d}t} = \mathbf{l}$$

6.4 Constantes de movimiento

Hasta este punto hemos mencionado una serie de limitaciones para el movimiento de las partículas, independientemente de los mecanismos de interacción. Cada una de ellas constituye un *Teorema de conservación*, asociada a una dada magnitud física cuyo valor numérico debe permanecer constante, estando totalmente fijado por las condiciones iniciales. Estas magnitudes se llaman constantes de movimiento.