Capítulo 7

La Ley de la Gravitación Universal

7.1 La Ley Armónica de Kepler

...

La ley que Kepler había encontrado no relacionaba los radios con los cinco poliedros regulares, pero era igualmente simple y bella:

> **Ley Armónica**: El cuadrado de la duración de cada año planetario T es proporcional al cubo del eje mayor D de la órbita
>
> $$T^2 = KD^3$$
>
> donde K es una constante que tiene el mismo valor para todos los planetas, incluida la Luna.

Por fin, Kepler había logrado encontrar una *señal divina*, su Música de las esferas. Quisiera que puedan apreciar lo que esta ecuación significaba en el desarrollo de la ciencia, ya que era la primera vez que se formulaba una ley física en forma matemática, usando el lenguaje de la geometría y el álgebra. Además, tal como discutiremos en la próxima sección, condujo a Newton a demostrar que la interacción entre los Planetas y el Sol debía seguir una ley de cuadrado inverso de la distancia.

7.2 La Gran Plaga de 1665

7.3 Isaac Newton

7.4 La ley de fuerza de cuadrado inverso

Veamos cuál fue la demostración de Newton, tal como aparece en sus notas de dicha época. Imbuido en las ideas de colisión ó *percusión* de Descartes y en las demostraciones geométricas tan en boga en esa época, el imaginó un cuadrado circunscribiendo una órbita circular, y que la partícula, en lugar de seguir dicha trayectoria, se movía rebotando en los puntos de contacto del círculo y el cuadrado. Voy a ser completamente anacrónico y usar una terminología moderna. Tengan en cuenta que Newton recién llegó al concepto de masa en 1685, es decir veinte años después, y que usa las palabras fuerza o presión indistintamente, para referirse a lo que hoy llamamos trabajo, y fuerza de movimiento para lo que hoy denominamos impulso. Con esto en mente se pueden dar una idea lo que costó descifrar esta demostración.

Empecemos. En cada rebote la partícula revierte la componente de impulso perpendicular al lado. La variación de impulso es igual al doble de esta componente, que a su vez es al impulso total como el lado del cuadrado externo es al lado del cuadrado interno, o equivalentemente, como el lado del cuadrado interno es a la mitad del lado del cuadrado externo. En otras palabras no estoy haciendo más que decir *raíz de dos* de una manera complicada. En una vuelta completa se producen cuatro rebotes, de manera que los choques que soporta el cuadrado externo equivalen a una variación de impulso que es al impulso de la partícula como la longitud de la trayectoria es al radio del círculo. Newton pasa entonces a afirmar sin demostración que la misma proporción se mantiene si el número de lados y puntos de impacto se multiplica por 2, una y otra vez. De esta manera, en una vuelta completa al círculo tenemos

$$\frac{\Delta p}{mv} = \frac{2\pi r}{r}$$

Dividiendo por el período del movimiento orbital $T = 2\pi r/v$, obtenemos la fuerza

$$F = \frac{\Delta p}{T} = \frac{mv^2}{r}$$

Ahora usamos la tercera ley de Kepler

$$T^2 = kr^3$$

para obtener

$$v = \frac{2\pi r}{T} \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

y con ello obtenemos finalmente la ley del cuadrado inverso

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Estos descubrimientos no fueron hechos públicos por Newton hasta casi 20 años después. Esta demora hizo que se desarrollara una agria disputa con Robert Hooke (1635-1702) sobre la preminencia en el descubrimiento de la ley del cuadrado inverso y por acusaciones de plagio.

7.5 Masa gravitatoria

Si queremos completar la definición de la fuerza de gravedad, podemos seguir el método instrumentalista de Mach, indicando que, según demuestra Newton, entre dos partículas 1 y 2 cualesquiera existe una fuerza atractiva que depende de la distancia r entre ambas $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -k_{21}\hat{\mathbf{r}}/r^2$. donde la constante de proporcionalidad es positiva y depende -de alguna manera que queremos investigar- de ambas partículas.

Si cambiamos la partícula 1 por otra 0, la fuerza de interacción estará caracterizada por otra constante k_{20}. En este caso se verifica que k_{21}/k_{20} es completamente independiente de la partícula 2. Puede cambiarse dicha partícula 2 por cualquier otra con cualquier característica, que la relación k_{21}/k_{20} permanece inalterada. A esta cantidad la llamaremos *masa gravitatoria* de 1 en unidades de 0. Tomando a la partícula 0 como unidad[1], anotamos simplemente $\xi_1 = k_{21}/k_{20}$ y la llamamos masa gravitatoria de la partícula 1. Tenemos entonces que

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -k_{20}\xi_1\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

O sea que la fuerza de interacción gravitatoria entre las partículas 2 y 1 sólo depende de la partícula 1 a través de su masa gravitatoria. Por simetría, la misma dependencia simple debe darse para la partícula 2, o sea:

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -\gamma_0\xi_2\xi_1\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

donde γ_0 es una constante universal que sólo depende de la partícula 0, es decir de las unidades elegidas.

[1]Si imaginamos que la "partícula" 2 es la Tierra, lo que estoy haciendo es nada más que comparar el peso de la partícula 1 con una unidad patrón dada por la partícula 0.

Estas *operaciones* nos han permitido definir la masa gravitatoria como una magnitud (definida con respecto a una masa “patrón” correspondiente a la partícula 0) que representa la mayor o menor respuesta de un cuerpo a una interacción gravitatoria. Por ahora constituye -junto con la masa inercial- una propiedad adicional de la materia.

7.6 Masa gravitatoria y masa inercial

...

Ahora bien, a partir del experimento de Galileo, Newton sabía que un cuerpo de masa inercial m en caída libre se mueve con una aceleración constante g. Por su propia segunda ley,

$$mg = \gamma_0 \xi \xi_T / r^2$$

donde ξ y ξ_T son las masas gravitatorias del cuerpo y de la Tierra respectivamente. r es el radio de la Tierra. Pero para que g sea una constante independiente de m, la única posibilidad es que la masa inercial m y la masa gravitatoria ξ sean -dentro del error experimental- proporcionales entre sí. Pensándolo bien, este es un resultado de lo más extraño. Pero todavía pasarían más de dos siglos antes de que alguien se cuestionara el porque de esta relación. Convencionalmente se eligen las mismas unidades para ambas cantidades, tomándolas iguales. Reescribimos la Ley de Gravitación Universal de esta manera,

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}) = -\gamma_0 m_2 m_1 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

7.7 ¡Newton mide la distancia a la Luna!

7.8 La ley de cuadrado inverso en electricidad y magnetismo

7.9 Determinación de la constante de gravitación universal

...

La constante universal γ_0 resultó ser aproximadamente igual a

$$\gamma_0 \approx 6.673 \times 10^{-11} \frac{\text{Newtonmetro}^2}{\text{kilogramo}^2}$$

Esta información nos permite comparar las fuerzas electrostáticas y gravitatoria, consideremos -por ejemplo- al electrón como unidad de masa y carga. Esto es muy común, al menos en física atómica. La relación carga/masa de esta partícula es aproximadamente igual a $e/m = 0.176 \times 10^{13}$Coulomb/kilogramo. Por lo tanto, el cociente de ambas fuerzas es del orden de

$$\frac{F_{\text{grav}}}{F_{\text{elec}}} \approx 0.24 \times 10^{-44}$$

Este es un número increíblemente pequeño. Sólo por comparación, tengan en cuenta que es aún dos órdenes de magnitud menor que el tiempo que tarda la luz en cruzar el diámetro de un protón ($\approx 10^{-24}$ seg) en comparación con la edad del Universo ($\approx 2 \times 10^{10}$ años).

Por ejemplo, para que un electrón sienta una interacción gravitatoria de igual magnitud que la interacción electrostática producida por otro electrón[2] deberíamos utilizar un cuerpo con una masa enorme de aproximadamente 3.8×10^{12}kg.

7.10 La ley de Titius-Bode

7.11 Descubrimiento de nuevos planetas

7.12 Para saber más

- Stanlye L. Jaki: *The Early History of the Titius-Bode Law*, Am. J. Phys. **40** (7), 1014-1023 (1972).
- Michael Martin Nieto: *The letters between Titius and Bonnet and the Titius-Bode law of planetary distances*, Am. J. Phys. **53** (1), 22-25 (1985).
- C. J. Ransom: *Bode's law and the origin of the Solar system*, Am J. Phys. **48**, 4 (1980).
- Richard C. Sapp: *Titius - Bode law: An astronomy project for a cloudy night*, Am. J. Phys. **48** (2), 138-141 (1980).
- Magdi Shoucri: *Titius - Bode law: Kepler's Fourth Law*, Am. J. Phys. **49** (3), 201 (1981).
- Leslie J. Tomley: *Bode's law and the "missing moons" of Saturn*, Am. J. Phys. **47** (5), 396-398.

[2] í¡Cuya carga eléctrica es indivisible!.