Capítulo 8

Fuerzas y potenciales I

8.1 Interacción elástica

Decimos que dos partículas están en interacción elástica cuando la fuerza de interacción es

$$\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - r_o\hat{\mathbf{r}})$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector posición que ubica a la partícula sobre la cual actúa la fuerza respecto de la otra. La energía potencial correspondiente es

$$V(r) = \frac{1}{2}k(r - r_o)^2$$

Las constante de restitución k y la longitud propia o de equilibrio r_o son independientes de los dos cuerpos y sólo dependen del mecanismo particular de interacción. El resorte descrito por Hooke es sólo un ejemplo de interacción elástica. En dicho caso, esta ley lineal vale sólo dentro de ciertos límites, fuera de los cuales el resorte se deforma (límite de elasticidad). Esto vale también en muchas aplicaciones, donde la ley de Hooke es sólo una aproximación válida cerca de un punto de equilibrio estable. Un ejemplo más simple de esto se da en el estudio de moléculas diatómicas.

8.2 Moléculas diatómicas

8.3 Fuerzas centrales conservativas

Hasta ahora hemos visto y utilizado tres fuerzas

$$\begin{array}{rrrrll}
\mathbf{F} = & +\beta_o q_2 q_1 \mathbf{r}/r^3 & V(r) = & \beta_o q_2 q_1/r & \text{Interacción:} & \text{electrostática} \\
 & -\gamma_o m_2 m_1 \mathbf{r}/r^3 & & -\gamma_o m_2 m_1/r & & \text{gravitatoria} \\
 & -k(\mathbf{r} - r_o\hat{\mathbf{r}}) & & k(r - r_o)^2/2 & & \text{elástica}
\end{array}$$

que comparten dos propiedades muy importantes. En primer lugar son *centrales*, es decir que actúan sobre la misma dirección del vector posición

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \cdots, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \cdots, t)\, \hat{\mathbf{r}}$$

Por otro lado son conservativa. Con esto último queremos decir que existe una función $V(\mathbf{r})$ llamada *energía potencial*, tal que

$$f = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

A continuación veremos una serie de leyes de fuerza conservativas no centrales.

8.4 Momento dipolar

Supongamos que acercamos dos cargas iguales y opuestas q_1 y $-q_1$ hasta una distancia $\mathbf{a}$. Si ubicamos otra carga q a una distancia $\mathbf{r}$ respecto del centro de masa de dicho par, la energía potencial del sistema es

$$V = \beta_o \left(\frac{q\, q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|} - \frac{q\, q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|} + \frac{q_1^2}{a} \right)$$

El último término es constante, y por lo tanto podemos eliminarlo redefiniendo el cero de energía

$$V = \beta_o\, q\, q_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|} \right)$$

Ahora supondremos que $a \ll r$, de manera tal que podemos desarrollar en términos de r/a,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}/2|} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\mp 1)^\ell \left(\frac{a}{2r} \right)^\ell P_\ell\, (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}})$$

donde P_ℓ son los polinomios de Legendre. Los primeros polinomios de la serie son

$$\begin{aligned}
P_0(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= 1 \\
P_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}} \\
P_2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= \frac{1}{2} \left(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}})^2 - 1 \right) \\
P_3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= \frac{1}{2} \left(5(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}})^3 - 3\, \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}} \right) \\
&\cdots
\end{aligned}$$

de manera tal que

$$\frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}/2|} = \frac{1}{r} \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2\, r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})^2 - a^2 r^2}{8\, r^5} + \cdots$$

y, por lo tanto,

$$V = \beta_o \, q \, q_1 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + \cdots$$

Esta energía potencial se denomina "dipolar", y se suele escribir en términos del *momento dipolar* $\mathbf{b} = q_1 \mathbf{a}$, de manera tal que

$$V_{\text{dipolar}} = \beta_o \, q \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3}$$

Para calcular la fuerza utilizamos que $\nabla r^n = n \, r^{n-1} \hat{\mathbf{r}}$ y $\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{d}$, con lo cual

$$\mathbf{F}_{\text{dipolar}} = - \nabla V_{\text{dipolar}} = \frac{\beta_o \, q}{r^5} \left(2 \, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \, \mathbf{r} - r^2 \mathbf{d} \right)$$

8.5 Momento cuadrupolar

Podemos repetir el proceso anterior, poniendo ahora dos dipolos opuestos $\mathbf{d}$ y $-\mathbf{d}$ a una distancia relativa $\mathbf{a}$. Si ubicamos una carga q a una distancia $\mathbf{r}$ ($r \gg a$) respecto del centro de masa de dicho par, la energía potencial del sistema es

$$\begin{aligned}
V_{\text{cuadrupolar}} &= \beta_o \, q \, \mathbf{d} \cdot \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{a}/2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|^3} - \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{a}/2)}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}/2|^3} \right) \\
&= \beta_o \, q \, \mathbf{d} \cdot \left((\mathbf{r} - \mathbf{a}/2) \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^5} \right) - (\mathbf{r} + \mathbf{a}/2) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^5} \right) \right) + \cdots \\
&= \beta_o \, q \, \frac{3 \, (\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}) \, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - \, (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) \, r^2}{r^5} + \cdots
\end{aligned}$$

Obtenemos así el *potencial cuadrupolar*[1]

$$V_{\text{cuadrupolar}} = \frac{\beta_o \, q}{2 r^5} \left(\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r} \right)$$

donde hemos definido el *tensor momento cuadrupolar*

$$\mathcal{E} = \text{Traza}(\mathcal{I}) - 3 \, \mathcal{I}$$

con $\mathcal{I}$ un tensor de elementos

$$I_{ij} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \, \delta_{ij} - (\mathbf{d} \cdot \hat{x}_i)(\mathbf{a} \cdot \hat{x}_j)$$

Utilizando la ecuación $\nabla (\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}) = 2 \, \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}$ obtenemos la fuerza

$$\mathbf{F}_{\text{cuadrupolar}} = -\nabla V_{\text{cuadrupolar}} = - \frac{\beta_o \, q}{r^4} \left(\mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{5}{2} \, (\hat{\mathbf{r}}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \, \hat{\mathbf{r}} \right)$$

[1] También llamado "potencial cuadrupolar eléctrico", para distinguirlo del caso "magnético" que no estudiaremos en este curso

En el caso particular donde los dipolos se orientan paralelos a la distancia $\mathbf{a}$, y reorientando el sistema de coordenadas de manera que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{d}$ sean paralelos a $\hat{z}$, la matriz I_{ij} es diagonal, con $I_{xx} = I_{yy} = d\,a$ y $I_{zz} = 2\,d\,a$. Resulta, entonces,

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{r} = -a \;\Big(3\,(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}})\,\mathbf{d} - d\,\mathbf{r}\Big)$$

con lo cual

$$\mathbf{F}_{\text{cuadrupolar}} = \frac{3}{2}\,\beta_o\,q\,d\,a\,\frac{2\,(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}})\,\hat{\mathbf{d}} + \Big(1 - 5\,(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{d}})^2\Big)\,\mathbf{r}}{r^5}$$

El potencial correspondiente se escribe

$$V_{\text{cuadrupolar}} = \beta_o\,q\,d\,a\,\frac{3\,(\hat{d} \cdot \hat{r})^2 - 1}{r^3}$$

8.6 Potenciales atómicos

8.6.1 Interacción dipolar

8.6.2 Interacción de polarizabilidad

8.6.3 Potencial de Maxwell

8.6.4 Interacción de London

8.7 Campo gravitatorio o electrostático de un objeto extenso

Consideremos ahora una distribución de cargas q_i ubicadas en posiciones fijas $\mathbf{a}_i$ respecto de un punto O. Si ubicamos una carga q a una distancia $\mathbf{r}$ respecto de O, la energía potencial (renormalizada) es

$$V = \beta_o\,q \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|}$$

Si bien estaremos discutiendo el caso de una interacción electrostática, los mismos resultados se pueden aplicar al caso gravitatorio reemplazando β_o por la constante de gravitación universal $-\alpha_o$ y q_i por las masas m_i.

Supongamos ahora que $r \gg a_i \forall\, i$. Repitiendo los pasos dados en las dos secciones anteriores, podemos escribir el siguiente desarrollo

$$V = \beta_o\,q \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} + \cdots\right)$$

donde

$$Q = \sum_i q_i$$

es la carga total del sistema, y

$$\mathbf{d}_{\mathrm{O}} = \sum_i q_i \mathbf{a}_i$$

es el momento dipolar. Evidentemente, la carga total no varía si trasladamos el punto O a otro O' separado del primero por una distancia $\mathbf{R}$. En cambio, el momento dipolar se modifica en

$$\mathbf{d}_{\mathrm{O}'} = \sum_i q_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{R}) = \mathbf{d}_{\mathrm{O}} - Q\,\mathbf{R}$$

Vemos que si la carga total es distinta de cero, entonces siempre podemos anular el momento dipolar si elegimos el origen en el *centro de carga* $\mathbf{R} = \mathbf{d}_{\mathrm{O}}/Q$. Evidentemente, todo lo dicho hasta ahora en esta sección se aplica a una distribución de partículas en cuanto a la interacción gravitatoria. En dicho caso, puesto que no es posible anular la masa total, siempre es posible anular el momento dipolar eligiendo el origen en el centro de masa. En el caso electrostático, en cambio, la carga total puede ser nula, y en dicho caso el momento dipolar es independiente de la elección del origen. Esto es justamente lo que pasa con el dipolo eléctrico, donde $\mathbf{d}_{\mathrm{O}'} = \mathbf{d}_{\mathrm{O}}$.

Si continuamos con el desarrollo anterior, nos encontramos con un término cuadrupolar dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{cuadrupolar}} &= \beta_o\, q \sum_i q_i\, \frac{3\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}_i)^2 -\ r^2\,a_i^2}{2\,r^5} \\ &= \frac{\beta_o\, q}{2r^5}\,\left(\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}\right) \end{aligned}$$

donde hemos definido el *tensor cuadrupolar*

$$\mathcal{E} = \mathrm{Traza}(\mathcal{I}) - 3\,\mathcal{I}$$

donde $\mathcal{I}$ es un tensor de elementos

$$I_{ij} = \sum_i q_i \left(a_i^2 \delta_{ij} - (\mathbf{a}_i \cdot \hat{x}_i)(\mathbf{a}_i \cdot \hat{x}_j)\right)$$

En el caso de una interacción gravitatoria, $\mathcal{I}$ se denomina *tensor de inercia*, "artefacto" matemático sobre el que volveremos más adelante en relación con el movimiento de los cuerpos rígidos.

La energía potencial es, entonces,

$$V = \frac{\beta_o\, q}{r}\,\left(Q + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}}{2r^4}\ + \cdots\right)$$

Con la ayuda de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla r^n &= n\, r^{n-1}\hat{\mathbf{r}} \\ \nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}) &= \mathbf{d} \\ \nabla(\frac{1}{2}\,\mathbf{r}^t\cdot\mathcal{E}\cdot\mathbf{r}) &= \mathcal{E}\cdot\mathbf{r} \end{aligned}$$

obtenemos la fuerza

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \frac{\beta_o\, q}{r^2}\,\left[Q\,\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\,(3\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{d} - \mathbf{d}) - \frac{1}{r^2}\,\left(\mathcal{E}\cdot\hat{\mathbf{r}} - \frac{5}{2}\,(\hat{\mathbf{r}}^t\cdot\mathcal{E}\cdot\hat{\mathbf{r}})\,\hat{\mathbf{r}}\right) + \cdots\right]$$

8.8 Distribución de carga con simetría axial

Cuando la distribución de carga es continua y con simetría axial, podemos reorientar el sistema de coordenadas de manera de hacer coincidir el eje z con el eje de simetría. En este caso, el momento dipolar apunta necesariamente en dicha dirección, $\mathbf{d} = d\hat{z}$. Por otra parte, el tensor de inercia es diagonal y con $I_{xx} = I_{yy}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^t\cdot\mathcal{E}\cdot\mathbf{r} &= r^2\,(2I_{xx} + I_{zz}) - 3\,\left((x^2+y^2)I_{xx} + z^2 I_{zz}\right) \\ &= (2z^2 - x^2 - y^2)I_{xx} + (x^2 + y^2 - 2z^2)I_{zz}) \\ &= (I_{xx} - I_{zz})\,(2z^2 - x^2 - y^2) \\ &= (I_{xx} - I_{zz})\,\left(3(\mathbf{r}\cdot\hat{z})^2 - r^2\right) \end{aligned}$$

y con ello

$$V_{\text{cuadrupolar}} = \frac{\beta_o\, q}{2r^5}\,\mathbf{r}^t\cdot\mathcal{E}\cdot\mathbf{r} = \frac{\beta_o\, q}{2r^3}\,(I_{xx} - I_{zz})\,\left(3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{z})^2 - 1\right)$$

Esta última expresión es idéntica a la obtenida en una sección anterior para un cuadrupolo formado por dos dipolos alineados. Se suelen definir los parámetros adimensionales

$$J_1 = -\,\frac{d}{Qa} \qquad J_2 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{Qa^2}$$

donde a es una dimensión característica del sistema, de manera tal que

$$V = \frac{\beta_o\, qQ}{r}\,\left(1 - J_1\,\frac{a}{r}\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{z} - J_2\,\frac{a^2}{r^2}\,\frac{3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{z})^2 - 1}{2} + \cdots\right)$$

En general, para un cuerpo asimétrico, el efecto de los *armónicos* de orden superior al cuadrupolar puede encontrarse sin dificultad, en tanto que el desarrollo de $|\mathbf{r}\pm\mathbf{a}/2|^{-1}$ en polinomios de Legendre puede integrarse para dar

$$V(r) = -\frac{\beta_o\, q\, Q}{r}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\,\left(\frac{a}{r}\right)^n\,P_n(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{a}})$$

donde $J_o = -1$. Así como el coeficiente J_2 está relacionado con el achatamiento o estiramiento del cuerpo a lo largo del eje de simetría, J_3 mide una deformación en forma de "pera". Los valores sucesivos de estos parámetros para el caso del campo gravitatorio terrestre son

$$\begin{aligned} J_2 &\approx 1.1 \times 10^{-3} \\ J_3 &\approx -2.5 \times 10^{-6} \\ J_4 &\approx -1.6 \times 10^{-6} \\ J_5 &\approx -0.2 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

La conclusión de esta sección es que al analizar la interacción (gravitatoria o electrostática) de una partícula con un sistema lejano, se puede lograr una mejor aproximación si junto con la consideración de una carga o masa puntual, se incorporan correcciones dipolares, cuadrupolares o de orden superior.

8.9 La forma de la Tierra

8.10 Órbitas satelitales

8.11 Mareas

8.12 Estabilidad de la órbita lunar

8.13 Hipotesis non fingo