Capítulo 9

Fuerzas y potenciales II

9.1 Fuerzas no conservativas: Interacción de rozamiento

Consideremos un cuerpo en reposo encima de una superficie horizontal. Su peso se equilibra con la reacción de vínculo $\mathbf{R}$. Si ejercemos sobre el cuerpo una fuerza horizontal $\mathbf{F}$ pequeña, observamos que el cuerpo no se mueve. Es decir que sobre el cuerpo actúa una fuerza de *rozamiento estático* $\mathbf{f}_{re}$ que equilibra a la fuerza aplicada. Esto vale hasta cierto valor máximo de f_{re}, superado el cual el cuerpo comienza a moverse. Esta fuerza de rozamiento estático máxima es proporcional a la fuerza normal de vínculo

$$f_{re}^{\max} = \mu_e R$$

El coeficiente de rozamiento estático μ_e depende de los materiales, el pulido, etc., pero es independiente del area de contacto dentro de límites muy amplios.

Una vez que ha comenzado el movimiento, la fuerza de rozamiento sigue una ley parecida a la de $f_{re}^{\max}$

$$f_{rd} = \mu_d R$$

pero donde el coeficiente de rozamiento dinámico μ_d es menor que μ_e.

Estos coeficientes dependen, no sólo de los tipos de materiales en contacto, sino también de otros factores como son la rugosidad, la temperatura, la suciedad ó la presencia de películas delgadas de humedad o cualquier lubricante. Muchos libros de texto explican esta fuerza como debida a una especie de enganche entre las crestas y los valles de dos superficies rugosas. Sin embargo, la principal causa de la fricción hay que buscarla en un efecto de atracción molecular[1]. Los valores de ambos coeficientes pueden encontrarse tabulados en distintos libros.

[1] F. Palmer, *Am. J. Phys.* **17** 181, 327, 336 (1949). G. P. Brewington, *Am. J. Phys.* **19**, 357 (1951).

9.2 La sociedad conspiradora de los demonios del rozamiento

9.3 Teorías refutables o falsables

9.4 El pensamiento escolástico

9.5 Primeras observaciones telescópicas

9.6 ¿Qué fuerza produciría una órbita ptolomaica?

Podemos representar una órbita ptolomaica simple (es decir, con un único epiciclo), en base a la siguiente ecuación paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)$$

donde

$$\mathbf{r}_i(t) = a_i\left(\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega_i t) + \hat{\mathbf{y}}\sin(\omega_i t)\right)$$

donde hemos supuesto que los planos del epiciclo y la deferente coinciden, v.g. $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ son paralelas (arbitrariamente paralelas al eje $\hat{\mathbf{z}}$. Derivando dos veces obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \vec{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2 \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \dot{\mathbf{r}} &= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times (\vec{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2) \\ &= \ddot{\mathbf{r}}(t) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \mathbf{r}_2) + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \mathbf{r}_1) \\ &= \ddot{\mathbf{r}}(t) - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)\,\mathbf{r}_2 - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)\,\mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente ley de fuerza

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = \vec{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + k\mathbf{r}$$

donde hemos definido $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ y $k = \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2$. Esta ley de fuerzas ocurre efectivamente en las aplicaciones de la Física, aunque no en relación con la interacción gravitatoria. Por ejemplo, en el primer término reconocemos la ley de Lorentz de la interacción de una partícula cargada con un campo magnético. Si $k = \omega_1 \cdot \omega_2 < 0$, la órbita se denomina "retrógrada". En este caso, reconocemos en el segundo término a la fuerza correspondiente a un oscilador isotrópico.

9.7 Modelo aristotélico de la caída libre

9.8 Fuerza de arrastre y sustentación

Analicemos el modelo aristotélico sobre el movimiento de los cuerpos desde una perspectiva moderna. Sabemos que siempre que un objeto se mueve dentro de un fluido, experimenta una fuerza que se suele separar en una componente en la misma dirección pero sentido opuesto al movimiento *relativo en el fluido*, llamada fuerza de *arrastre* (Drag) $\mathbf{F}_D$ y una fuerza normal al movimiento, llamada fuerza de *sustentación* (Lift) $\mathbf{F}_L$. Estas fuerzas se originan por la suma de las fuerzas normales y tangenciales a la superficie del cuerpo. El arrastre debido a los esfuerzos tangenciales se denomina "arrastre viscoso" y es importante en aquellos casos en los cuales el área superficial paralela a la dirección del movimiento es grande comparada con el área proyectada normal al movimiento. El "arrastre de presión" es importante y a menudo dominante, para los cuerpos escarpados.

En una aproximación de fluido no viscoso, incompresible y sin formación de vórtices, se puede obtener una aproximación sorprendentemente precisa para la fuerza de sustentación, pero la fuerza de arrastre resulta ser nula. Esta paradoja fue descubierta por D'Alembert a mediados del siglo XVIII, y nos indica que el arrastre es principalmente viscoso, o sea debido a los esfuerzos tangenciales sobre la superficie. En 1904 Prandtl propuso que todos los efectos viscosos, responsables del arrastre, están localizados en una delgada capa cerca del contorno del cuerpo, denominada "capa límite". Fuera de ella, el fluido actúa como no viscoso. Si el gradiente de presión sobre la superficie del cuerpo es suficientemente grande, la capa límite se separa del cuerpo, produciendo una *estela*. Esto produce una reducción de la presión en la parte posterior del cuerpo, lo que se manifiesta como una fuerza neta de arrastre de presión.

Un problema de gran interés tecnológico radica en la reducción del arrastre de presión. Para ello es necesario disminuir la magnitud del gradiente adverso de presión, dotando al cuerpo de una forma aerodinámica, v.g. afilándolo gradualmente en la parte posterior. Sin embargo, si el cuerpo es muy largo, la ganancia por la reducción del arrastre de presión puede compensarse con el incremento del arrastre por rozamiento. Así, el problema del diseño aerodinámico de un cuerpo para lograr el mínimo arrastre posible exige un compromiso entre arrastre por presión y por rozamiento.

Esto muestra que el cálculo de la fuerza de arrastre es un problema muy complicado que depende de muchísimos factores, en especial del tipo de flujo y de la forma del cuerpo. En general, las fuerzas de arrastre y sustentación suelen escribirse como

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2$$

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A\, v^2$$

donde ρ es la densidad del fluido y A es un área característica del objeto, generalmente la proyección del área normal a la dirección del movimiento. La velocidad $\mathbf{v}$ se define como la velocidad *ambiente* del objeto respecto del fluido. En principio, los coeficientes "adimensionales" de arrastre C_D y sustentación C_L dependen del tamaño, forma y velocidad del objeto en relación con las propiedades del fluido a través del número de Reynolds

$$Re = \rho v L/\eta$$

que caracteriza al flujo del fluido alrededor del objeto. Aquí, L es una longitud característica del problema, y η es el coeficiente de viscosidad dinámica. Este coeficiente representa una especie de inercia del fluido para fluir libremente[2].

Consideremos el flujo alrededor de un objeto esférico de diámetro L. Para un movimiento muy lento o un flujo muy viscoso, con un número de Reynolds muy bajo ($Re < 1$), sólo el rozamiento es importante y el coeficiente de arrastre disminuye al aumentar el número de Reynolds. De hecho, para un cuerpo esférico se cumple con muy buena aproximación que $C_D = 24/Re$ y, por lo tanto, la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad

$$\mathbf{F}_D = -3\pi\eta L\mathbf{v}$$

Esta proporcionalidad de la fuerza de arrastre y la velocidades ocurre en general para objetos de cualquier forma, no necesariamente esféricos, siempre que el número de Reynolds sea suficientemente pequeño. Escribimos la *ley de Stokes* $\mathbf{F}_D = -k\eta\mathbf{v}$ donde la constante de proporcionalidad k es función de la geometría del objeto únicamente.

Escribimos la condición para el flujo de Stokes, $Re < 1$, como $Lv < \eta/\rho$, donde la *viscosidad específica* η/ρ es aproximadamente igual a 0.15 cm^2/seg para el aire y 0.01 cm^2/seg para el agua[3]. Vemos que el flujo de Stokes se produce en condiciones de baja densidad, alta viscosidad, baja velocidad ó pequeñas dimensiones. Es decir, cuando las fuerzas de inercia son mucho menores que las fuerzas viscosas. El movimiento de micro-organismos representa un buen ejemplo de un flujo tipo Stokes. Muchos libros de texto *enseñan* que un cuerpo moviéndose en un fluido experimenta una fuerza de arrastre directamente proporcional a la velocidad. Luego utilizan esta *ley de Stokes* para analizar la caída de cuerpos en

[2]Más precisamente, relaciona las tensiones de corte aplicadas sobre un fluido con las deformaciones producidas. Básicamente se supone que la tensión (fuerza por unidad de area) τ_{xy} ejercida en la dirección y sobre un plano perpendicular al eje x está relacionada linealmente con la deformación $\gamma_{xy} = \partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x$; v.g. $\tau_{xy} = \eta\gamma_{xy}$. Esta suposición, introducida por Stokes en 1845, define lo que se llama un fluido *newtoniano*, y es satisfecha en general por todos los gases y algunos de los fluidos más comunes.

[3]a temperatura ambiente de 20^o y una presión de una atmósfera.

el aire. Vemos ahora que esto sólo sería válido si viviéramos en una pecera llena de glicerina (alta viscosidad). El comportamiento de un proyectil en el aire suele ser muy distinto. Consideremos una situación muy favorable de un proyectil muy pequeño, de 1 cm de diámetro. La velocidad límite para que valga la ley de Stokes es de apenas 1.5 mm/seg. O sea que en una hora el proyectil recorrería una distancia de apenas 5.4 metros. En cambio, si se moviese a la velocidad del sonido en el aire (c = 330 m/seg), su número de Reynolds treparía hasta $\mathcal{R} = 2.2 \times 10^5$

En realidad, para números de Reynolds más grandes comienza a producirse el desprendimiento de vórtices (denominados vórtices de Karman), lo cual se hace más intenso al aumentar $\mathcal{R}\rceil$, hasta llegar a una situación donde el arrastre de presión es mayor que el de rozamiento. En esta situación, el arrastre es prácticamente independiente del número de Reynolds. En particular, para un proyectil esférico tenemos que $C_D \approx 1/2$, y el arrastre está aproximadamente representado por $F_D = -(\pi/16)\rho L^2 v^2$. Para el aire en condiciones normales de presión y temperatura, $\rho = 1.20$ kg/m^3, con lo cual $F_D = (0.235 kg/m^3)(Lv)^2$

Finalmente a velocidades mayores que la del sonido en las dadas condiciones de densidad relativa, ($Re \gg 5 \times 10^5$ para un proyectil esférico), el flujo en la parte posterior del objeto se vuelve turbulento y más concentrado espacialmente. Esto genera una brusca disminución del arrastre de presión, y con él, del arrastre total. En tales condiciones de velocidades muy altas, el *número de Mach* es más significativo que el número de Reynolds. El número de Mach se define como el cociente de la velocidad ambiente del objeto respecto de la velocidad del sonido. Para velocidades bien por encima de la del sonido, el coeficiente de arrastre es constante y nuevamente la fuerza de arrastre es una función cuadrática de la velocidad ambiente.

Vemos que, en general, tanto por encima como por debajo de la velocidad del sonido, se da una situación donde el arrastre de presión domina sobre el viscoso. El arrastre de presión está caracterizado por un coeficiente C_D constante, *id est* por una fuerza de arrastre cuadrática con la velocidad[4].

Estos resultados se aplican a objetos que son grandes comparados con el camino libre medio de las moléculas del fluido, es decir con la distancia promedio que una molécula del fluido recorre entre colisión y colisión. Para el aire en condiciones normales de presión y temperatura, el camino libre medio es del orden de 10^{-5} cm, por lo cual no debemos preocuparnos mucho por esta condición. Sin embargo, es crucial cuando se trata de estudiar el arrastre atmosférico de un satélite artificial. En general, las dimensiones de un satélite son pequeñas comparadas con el camino libre medio de las moléculas en la atmósfera exterior (que a 300 km sobre la superficie de la Tierra es del orden de 10 km). En este caso, la mecánica de fluidos deja de ser aplicable, y el frenamiento se debe a colisiones individuales de

[4]Una interpretación de este efecto puede hacerse considerando que la frecuencia de colisiones con moléculas del fluido es proporcional a v, mientras que el momento transferido promedio por colisión introduce otro factor proporcional a v.

las moléculas en el medio. El resultado es una arrastre de presión puro, con un coeficiente $C_D \approx 2$.

9.9 Velocidad terminal

Independientemente de la relación entre la fuerza de arrastre y la velocidad, un cuerpo en caída libre aumenta su velocidad hasta que se equilibran el peso mg y el arrastre $F_D = F_D(v)$, alcanzando una velocidad límite que es solución de

$$F_D(v_{\text{lim}}) = mg$$

Si apelamos a la ecuación de Stokes para calcular la velocidad límite de un cuerpo en caída libre, lo más probable es le *pifiemos* hasta en el orden de magnitud. De cualquier manera, es siempre posible calcular la velocidad límite a partir de la ecuación original para el arrastre, como la solución de $mg = C_D \rho v^2 A/2$. Tal como vimos, para números de Reynolds en un rango intermedio ($10^4 < Re < 10^5$), el coeficiente de arrastre es prácticamente constante y del orden de la unidad[5]. Despejando de la ecuación anterior, obtenemos

$$v_{\text{lim}} = \frac{1}{\sqrt{C_D \rho A/2}} \sqrt{mg}$$

Un hombre de 75 kg, cayendo de cabeza con un area transversal de 0.3 m^2, alcanzaría una velocidad límite del órden de los 90 metros por segundo (unos 325 km/hora)[6]; mientras que si planea con un area transversal del orden de 1 m^2, podría reducir esta velocidad a unos 60 m/seg (215 km/hora). Comparativamente, una gota de lluvia con un radio típico de 1 mm, cae con una velocidad límite de 6.6 m/seg (unos 24 km/hora). La ley de Stokes indicaría una velocidad de 120 m/seg (432 km/hora).

Un comentario final: De cualquier manera que lo veamos, el modelo aristotélico para la caída de los cuerpos es básicamente correcto, todo depende de lo que entendamos por *fuerza*.

9.10 Galileo Galilei

9.11 Experimento del plano inclinado

9.12 Crítica del experimento del plano inclinado

[5] 1.17 para un disco circular, 0.47 para una esfera.

[6] Si usasemos la ley de Stokes, obtendríamos una velocidad límite del orden de 15×10^6 km/hora