Capítulo 10

Órbitas producidas por fuerzas centrales

10.1 Introducción

En un capítulo anterior hemos visto una variedad de fuerzas, varias de las cuales, como por ejemplo la elástica, la gravitatoria y la electrostática, tienen en común la propiedad de ser *centrales*.

Por la tercera ley de Newton, las fuerzas de acción y reacción asociadas a una interacción entre dos partículas deben ser de igual magnitud y de sentido opuesto, pero no se impone ninguna restricción sobre la dirección. Es decir que ambas fuerzas deben ser paralelas, pero pueden tener diferentes rectas de acción. Cuando están sobre la recta que une ambas partículas, se dice que son centrales.

Ahora intentaremos dar una solución completa al problema de dos cuerpos en interacción mutua por medio de una fuerza central.

10.2 Problema unidimensional equivalente

Habíamos visto cómo, en general, este problema se podía reducir a un problema equivalente de una sola partícula de masa $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ a una distancia $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ de un centro de fuerzas "fijo". La segunda ley de Newton se escribe

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mu \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

Si la fuerza es conservativa, con potencial $V(r)$, se conserva la energía total

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(r)$$

Si la fuerza es central, se conserva el impulso angular

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mu \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

Habíamos visto que la constancia del impulso angular implicaba que ambas partículas se deben mover en un mismo plano con el centro de masa. Una vez calculada la posición relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, las trayectorias de ambas partículas (en el sistema de referencia centro de masa) se calculan a partir de las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{cm} &= \frac{\mu}{m_1}\,\mathbf{r} \\ \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{cm} &= -\frac{\mu}{m_2}\,\mathbf{r} \end{aligned}$$

Como es movimiento es plano, nos conviene expresar la trayectoria en coordenadas polares $(r,\,\phi)$[1]. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{r} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} \end{aligned}$$

De esta manera, la energía y el impulso angular pueden escribirse como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] + V(r) \\ \mathbf{l} &= \mathbf{r} \times \mu r \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\hat{z} \end{aligned}$$

Reemplazando la segunda expresión en la primera obtenemos

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\ell^2}{\mu r^2} + V(r)$$

Igual energía tendría un problema ficticio unidimiensional de una partícula de masa μ en un potencial *ficticio*

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{1}{2}\,\frac{\ell^2}{\mu r^2}$$

La magnitud $\ell^2/2\mu r^2$ se denomina *energía centrífuga*.

[1] con el eje $\hat{z}$ en la dirección del impulso angular, $\mathbf{l} = \ell\hat{z}$.

10.3 Ecuación diferencial de las órbitas

Aplicando la conservación del impulso angular, escribimos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\ell}{\mu r^2}\end{aligned}$$

Reemplazamos en la expresión para la energía total

$$E = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\ell}{\mu r^2}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

que podemos escribir en términos de $u = 1/r$ como

$$E = \frac{\ell^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + u^2\right] + V(r)$$

Derivando respecto de ϕ, obtenemos

$$0 = \frac{\ell^2}{2\mu}\left[2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + 2u\right] + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}$$

Finalmente, escribimos $\mathrm{d}V/\mathrm{d}u$ en términos de la fuerza $F(r)$,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u} = -r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = r^2F(r)$$

para obtener la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\ell^2u^2}{\mu}\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\right] = -F\left(\frac{1}{u}\right)$$

Esta ecuación permite encontrar la órbita, si se conoce la ley de fuerza $F(r)$ ó, recíprocamente, hallar la ley de fuerza si se conoce la órbita $r(\phi)$.

10.4 Resolución completa del problema

Para dar una resolución completa de este problema, volvemos a la ecuación

$$E = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\ell}{\mu r^2}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

y la escribimos de la siguiente manera

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\ell/r^2}{\sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r))}}\,\mathrm{d}r$$

A partir de la cual podemos calcular la *trayectoria* $r = r(\phi)$ de la partícula, a partir de

$$\phi = \phi_o + \int_{r_o}^{r} \frac{\ell/r'^2}{\sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r'))}}\,\mathrm{d}r'$$

Finalmente, la evolución temporal se puede obtener a partir de la conservación del impulso angular

$$t = t_o + \int_{\phi_o}^{\phi} \frac{\mu r(\phi')^2}{\ell}\,\mathrm{d}\phi'$$

dando una resolución completa del problema.

10.5 Principales características de las órbitas

10.5.1 Puntos de retorno

Los valores de r para los cuales $E = V_{eff}(r)$ determinan los límites de la región de movimiento con respecto a la distancia al centro. Estos puntos (r_0 , ϕ_o) se denominan *puntos de retorno*.

Supongamos ahora que medimos los ángulos respecto de un punto de retorno. Invertir el sentido de movimiento es equivalente a invertir el sentido en que apunta el impulso angular, manteniendo inalterada la condición inicial de la ecuación de las órbitas ($r(0) = r_o$, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\phi|_{\phi_o} = 00$. O sea que la ecuación de las órbitas es la misma, pero con el sentido de giro invertido. Esto demuestra que

> *Las órbitas son invariantes ante la reflexión respecto de los puntos de retorno.*

10.5.2 Caída al centro de fuerza

Consideremos ahora un movimiento orbital caracterizado por una energía potencial efectiva

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu r^2}$$

como se muestra en la figura. Para una energía total E_1, vemos que hay un sólo punto de retorno r_o. Dos partículas que se acercan una a otra procedentes del infinito, llegarían a un *perihelio* ó "distancia de máximo acercamiento" r_p, y volverían a alejarse una de otra. Decimos que las partículas rebotaron en la "barrera centrífuga". Esto es válido en forma general. La existencia de un impulso angular no nulo, $\ell \neq 0$ conduce generalmente a la imposibilidad de que la partículas se alcancen una a otra[2], aún cuando la interacción sea atractiva. Esto es así, salvo que la energía potencial $V(r)$ sea tan atractiva a cortas distancias que supere a la energía centrífuga $\ell^2/2\mu r^2$. Es decir

$$\lim_{r\to 0} r^2 V(r) < -\frac{\ell^2}{2\mu}$$

En dicho caso, ocurrirá una "caída al centro de fuerzas". A energías potenciales con estas características se los denomina "singulares". Como caso particular, vemos que los potenciales elástico, gravitatorio ó electrostático no son singulares, y por lo tanto, la caída al centro de fuerzas es imposible. En cambio, toda energía potencial atractiva de la forma $V(r) = -Z/r^n$ con $n > 2$ es necesariamente singular.

10.5.3 Orbitas acotadas y cerradas

Cuando, en la figura anterior, la energía total del sistema es igual a E_2, existen dos distancias de retorno r_p y r_a, denominadas también *distancias absidales.* Las partículas orbitan una alrededor de la otra manteniéndose dentro de una corona con distancias r limitadas entre ambos valores. Decimos que las órbitas están acotadas.

Esto no significa que las órbitas se cierren necesariamente sobre sí mismas. Durante el tiempo que r va de r_a hasta r_p y nuevamente a r_a, las partícula han recorrido un ángulo igual

$$\Delta\phi = 2\int_{r_p}^{r_a} \frac{\ell/r'^2}{\sqrt{2\mu(E - V_{\rm eff}(r')}}\,\mathrm{d}r'$$

Es inmediato que las órbitas se cerrarán sobre si mismas sólo si este ángulo es una fracción de 2π,

$$\Delta\phi = \frac{p}{q}2\pi$$

En este caso las órbitas comenzarán a repetirse después de completar q giros completos.

Para las energías potenciales estudiadas hasta aquí (elástica, gravitatoria y electrostática), todas las órbitas acotadas son cerradas. Además se cierran sobre sí mismas después de completar un sólo giro.

En 1875, M. J. Bertrand[3] demostró que este último resultado es más general que lo aquí expuesto, ya que una órbita acotada producida por una interacción

[2] O, en otros términos, que la partícula de masa reducida μ alcance el centro de fuerza.

[3] M. J. Bertrand: *C. R. Acad. Sci.* (Paris) **77**, 849 (1875).

central es cerrada sí y sólo sí la ley de fuerza es lineal (elástica) ó proporcional al cuadrado inverso de la distancia (gravitatoria y electrostática)[4].

10.5.4 Orbitas circulares y orbitación

Cuando la energía total del sistema es igual a E_3, la corona que define a la órbita acotada, se reduce a un círculo de radio r_o. O sea que la distancia r es constante y la órbita es circular. Esto podrá ocurrir siempre que exista un extremo en la energía potencial efectiva $\mathrm{d}V/\mathrm{d}r|_{r_o} = 0$. Vemos que en el caso de la figura, este extremo es un mínimo, y la órbita circular es estable.

Supongamos ahora, que la energía total es levemente superior a un máximo local de la energía potencial efectiva. En dicho caso, la velocidad radial $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ es mínima en dicho punto y ambas partículas se demoran en una órbita cercana a la órbita circular correspondiente a ese extremo de la energía potencial efectiva, girando alrededor del centro de fuerzas, antes de continuar hacia uno u otro lado de dicho punto. Dicho fenómeno se denomina *orbitación*.

10.5.5 Velocidad angular

Hasta este punto nos hemos concentrado en la variación de la distancia relativa r, clasificando las órbitas en abiertas, cerradas, acotadas y circulares. es obvio que al variar r, el ángulo radial ϕ también irá variando, pero debido a la conservación del impulso angular, esto ocurrirá de una manera completamente determinada. El sentido de giro será siempre el mismo, y la velocidad angular depende unívocamente de la distancia relativa r según

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{\mu r^2}$$

manteniendo la constancia de la velocidad areolar indicada en la segunda ley de Kepler. Esto hace que la velocidad angular sea máxima en los perihelios r_p y mínima en los afelios r_a. En una trayectoria abierta, la velocidad angular tiende a cero cuando las partículas se alejan una de otra. En una caída al centro de fuerzas, la velocidad angular diverge como $1/r^2$. Sin embargo, esto no quiere decir, necesariamente, que las partículas dan un numero infinito de vueltas.

Consideremos -por ejemplo- una energía potencial singular, que para valores pequeños de r se comporta como $V(r) \approx -Z/r^n$, con $n > 2$. Siendo r pequeño, podemos despreciar la energía total E y el término centrífugo $\ell^2/2\mu r^2$ frente a $V(r) = -Z/r^n$ en el radicando $\sqrt{E - V(r) - \ell^2/2\mu r^2}$ de la ecuación de las órbitas. Integrando la ecuación resultante, obtenemos

$$\phi \;\approx\; \phi_o + \int_{r_o}^{r} \frac{\ell/r'^2}{\sqrt{2\mu Z/r'^n}}\,\mathrm{d}r'$$

[4]Lowell S. Brown: "Forces giving no precession orbit", *Am. J. Phys.* **46** (9), 980 (1978).

$$= \quad \phi_o + \frac{\ell}{\sqrt{2\mu Z}}\,\frac{n-2}{2}\,\left(r_o^{(n-2)/2} - r^{(n-2)/2}\right)$$

Vemos así que se produce un número finito de revoluciones durante la caída al centro de fuerzas. Esta situación contrasta con lo que ocurre con una energía potencial dipolar $V(r) = -Z/r^2$. En dicho caso no es posible despreciar el término de energía centrífuga $(\ell^2/2\mu r^2)$, resultando

$$\phi \approx \phi_o + \frac{\ell}{\sqrt{2\mu Z - \ell^2}}\,\ln\left(\frac{r}{r_o}\right)$$

Vemos que el ángulo ϕ diverge en el límite $r \to 0$. A pesar de ello, como la velocidad radial

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\,(E - V_{\mathrm{eff}}(r))}$$

también diverge para $r \to 0$, ¡el proyectil cae al centro de fuerzas en un tiempo finito!.

10.6 Dinámica a partir de la Cinemática

Si conocemos la dinámica de un sistema, es decir las fuerzas que actúan sobre el mismo, podemos determinar su cinemática a partir de las ecuaciones de movimiento, v.g. las ecuaciones de Newton. Sin embargo, uno de los problemas mecánicos más importantes involucró la situación inversa: Esta fue la deducción de la ley de gravitación a partir de las Leyes de Kepler, realizada por Newton hacia fines del siglo XVI.

En la actualidad, este problema no genera gran dificultad, ya que conocida la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, podemos encontrar la fuerza que genera dicha trayectoria por medio de la ecuación de Newton, $\mathbf{F} = \mu\ddot{\mathbf{r}}$. En particular, si el impulso angular $\mathbf{l}$ se conserva, la fuerza debe ser central, y por lo tanto, podemos encontrar la fuerza a partir de la ecuación diferencial de las órbitas

$$\mathbf{F}\left(\frac{1}{u}\right) = -\,\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\,\left[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\right]\,\hat{\mathbf{r}}$$

con $u = 1/r$. Consideremos, por ejemplo, que observamos que un sistema de dos partículas describe una órbita con forma de *cardiode*

$$r = a\,(1 + \cos\phi)$$

Puede verse fácilmente que

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} = 3au^2 - u$$

Reemplazando en la ecuación diferencial de las órbitas, obtenemos

$$\mathbf{F} = -\,\frac{3a\ell^2}{\mu\, r^4}\;\hat{\mathbf{r}}$$