# Chapter 11

# El problema de Kepler

## 11.1 Correspondencia entre Hooke y Newton

## 11.2 El problema de Kepler

La ley de fuerza proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia es la más importante forma de interacción, por lo cual merece un estudio detallado. Anotamos la energía potencial $V(r) = -k/r$, donde $k = \gamma_o m_1 m_2$ para la interacción gravitatoria y $k = -\beta_o q_1 q_2$ para la interacción electrostática.

Comenzamos reemplazando en la ecuación diferencial de las órbitas

$$\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\left[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\right] = -F\left(\frac{1}{u}\right)$$

para obtener

$$\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\left[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\right] = ku^2$$

Esta ecuación diferencial admite la solución inmediata

$$\frac{1}{r} = \frac{k\mu}{\ell^2}\left(1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_o)\right)$$

Donde $\varepsilon$ y $\phi_o$ son las dos constantes de integración. Esta expresión es la ecuación de una cónica con un foco en el origen

$$\frac{2\kappa}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_o)$$

donde $\kappa = \ell^2/2k\mu$ se llama *latus rectum* y $\varepsilon$, *excentricidad.* Además, es fácil ver que el punto donde $\phi = \phi_o$ es el punto de máximo acercamiento al origen, denominado *perihelio* $r_o = 2\kappa/(1+\varepsilon)$.

Las *secciones cónicas* ó simplemente *cónicas* son generadas por la intersección de un cono circular recto por un plano. Según sea el ángulo relativo entre ambas superficies, se puede formar una curva cerrada (*elipse*) ó abierta(*hipérbola*). La *parábola* es el caso límite entre ambas curvas[1].

Como no podía ser de otra manera, también podemos llegar a la misma expresión para la órbita en términos de cónicas a partir de la solución formal

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_o + \int_{r_o}^{r} \frac{\ell / r'^2}{\sqrt{2\mu(E - V_{\mathrm{eff}}(r')}}\, \mathrm{d}r' & (11.1) \\ &= \phi_o + \int_{r_o}^{r} \frac{\ell / r'^2}{\sqrt{2\mu(E - \ell^2/2\mu r'^2 + k/r'}}\, \mathrm{d}r' & (11.2) \\ &= \phi_o - \int_{u_o}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\mu E/\ell^2 - u'^2 + (2\mu k/\ell^2)u'}}\, \mathrm{d}u' & (11.3) \end{aligned}$$

donde $r_o$ es un cero del radicando. Una integración elemental nos conduce a

$$\phi = \phi_o + \arccos \frac{(2\mu k/\ell^2)u - 1}{\sqrt{1 + 2E\ell^2/\mu k^2}}$$

Finalmente, despejando $u = 1/r$, obtenemos la ecuación de la órbita, dada por la misma expresión anterior,

$$\frac{1}{r} = \frac{k\mu}{\ell^2}\left(1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_o)\right)$$

salvo que ahora podemos identificar la *excentricidad* con

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}$$

De las cuatro constantes de integración que definen una trayectoria, solución de la ecuación de Newton en el plano de la órbita, la ecuación anterior sólo depende de tres $\ell$, $E$ y $\theta_o$. Estas tres constantes bastan para dar la forma (a través de la excentricidad $\varepsilon$ y el latus rectum $\kappa$) y la orientación (a través del ángulo del perihelio $\phi_o$). La constante de movimiento restante nos proporciona la posición inicial $\phi = \phi(t = 0)$ de la partícula sobre la órbita. Por ahora, sólo estamos

[1]Estas construcciones geométricas fueron ampliamente estudiadas en la época alejandrina, principalmente por Arquímedes (287 AC - 212 AC) y Apolonio de Perga (262 AC - 180 AC), a quién se debe la nomenclatura de elipse, parábola e hipérbola. En 1637 Descartes demostró en un apéndice de su *Discurso del Método* que tales construcciones geométricas podían escribirse en forma algebraica, tal como hemos hecho nosotros más arriba. Este paso hacia lo que hoy llamamos *Geometría analítica* fue finalmente dado independientemente por un contemporáneo de Descartes, el matemático Pierre de Fermat (1601 - 1665).

explorando la *forma* de la órbita, y por lo tanto esta última información resulta superflua. Por supuesto, será necesaria cuando queramos completar la solución, hallando $r$ y $\phi$ en función del tiempo.

La naturaleza de la órbita depende de la magnitud de la excentricidad, de acuerdo con el siguiente esquema

| | | |
|---|---|---|
| $\varepsilon > 1$ | $E > 0$ | hipérbola |
| $\varepsilon = 1$ | $E = 0$ | parábola |
| $\varepsilon < 1$ | $E < 0$ | elipse |
| $\varepsilon = 0$ | $E = -\mu k^2/2\ell^2$ | circunferencia |

Recordemos, por último, que aquí hemos estado estudiando el movimiento de una partícula ficticia de masa reducida $\mu$. Las dos partículas que caracterizan este problema reducido, también se han de mover en órbitas cónicas, con un foco en el centro de masa.

## 11.3 Orbitas elípticas

Estudiemos un poco más profundamente las órbitas elípticas. La longitud de su eje mayor está dado por la el promedio de sus dos distancias absidales

$$2a = \frac{2\kappa}{1+\varepsilon} + \frac{2\kappa}{1-\varepsilon} = \frac{4\kappa}{1-\varepsilon^2}$$

Reemplazando $\kappa$ y $\varepsilon$ en términos de la energía $E$ y el impulso angular $\ell$, encontramos que esta longitud es sólo función de la energía

$$2a = -\frac{k}{E}$$

Este resultado es de gran importancia en el modelo atómico desarrollado por Niels Bohr (1885 - 1962) en los inicios de la física cuántica (1913). Volveremos sobre este modelo más tarde.

La longitud del eje menor puede calcularse en forma similar, obteniendo

$$2b = \frac{2\ell}{\sqrt{2\mu E}}$$

Uniendo ambos resultados anteriores podemos escribir el impulso angular, en términos de las longitudes de ambos ejes mayor y menor

$$\ell = b\sqrt{\mu k/a}$$

Ahora vamos a utilizar este resultado para deducir la ley armónica de Kepler. Para ello nos basamos en la constancia de la velocidad areolar

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\ell}{2\mu} = \sqrt{\frac{b^2 k}{2a\mu}}$$

Integrando en un período $T$, obtenemos el área total de la elipse

$$\pi ab = \sqrt{\frac{b^2 k}{2a\mu}}\, T$$

O sea

$$T^2 = 4\pi^2 \, \frac{\mu}{k} \, a^3$$

## 11.4 Dependencia temporal de las órbitas de Kepler

¿Qué le pasa a este tío que no termina de calcular la evolución temporal de las órbitas?. La razón de esta postergación es debida a que -lamentablemente- esta dependencia de la posición relativa $\mathbf{r}$ en función del tiempo $t$ no puede encontrarse en forma explícita.

La ecuación para la dependencia temporal

$$t = t_o + \int_{\phi_o}^{\phi} \frac{\mu r(\phi')^2}{\ell} \, \mathrm{d}\phi'$$

puede integrarse analíticamente por medio de una adecuado cambio de variables. Esto conduce a una representación paramétrica de la evolución temporal de la órbita.

Para una órbita elíptica tenemos

$$\begin{aligned} x &= a(\cos\xi - 1) \\ y &= a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\mathrm{sen}\xi \end{aligned}$$

con

$$t = \sqrt{\mu a^3/k}(\xi - \varepsilon\,\mathrm{sen}\xi)$$

Una vuelta completa alrededor de la elipse corresponde a un aumento de $xi$ desde 0 hasta $2\pi$.

Un cálculo enteramente similar muestra que para una órbita hiperbólica

$$\begin{aligned} x &= a(\cosh\xi - k/|k|) \\ y &= a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\mathrm{senh}\xi \end{aligned}$$

con

$$t = \sqrt{\mu a^3/|k|}(\varepsilon\,\mathrm{senh}\xi - k/|k|)$$

donde, ahora, el parámetro $\xi$ varía de $-\infty$ to $\infty$.

## 11.5 Conservación del vector de Runge-Lenz

Hay una *integral de movimiento* que sólo existe para leyes de fuerza de cuadrado inverso. Esta cantidad es el vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{k}\,\mathbf{v}\times\mathbf{l} + \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Derivando respecto al tiempo, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{k}\,\mathbf{a}\times\mathbf{l} - \frac{1}{k}\,\mathbf{v}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{F}) + \frac{\mathbf{v}}{r} + \mathbf{r}\,\frac{\mathbf{v}.\mathbf{r}}{r^3}$$

Por medio de adecuadas sustituciones ($\mathbf{l} = \mu\mathbf{r}\times\mathbf{v}$, $\mathbf{F} = \mu\mathbf{a} = -k\mathbf{r}/r^3$), advertimos que el miembro de la derecha se anula; con lo cual este vector **K** es una integral de movimiento. Es importante aclarar que se trata de una "nueva" constante de movimiento, no reducible a alguna combinación de la energía y el impulso angular. Apunta en la dirección del foco al perihelio, y su magnitud es igual a la excentricidad $\varepsilon$. Por lo tanto nos indica que ambas ni la posición ni la magnitud del perihelio varía con el tiempo.

## 11.6 Ley de fuerzas para órbitas cónicas

Hemos completado la demostración de que dos partículas con una interacción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia relativa se mueven en órbitas cónicas (elipse, parábola ó hipérbola) con un foco en el centro de masa del sistema. También podemos demostrar fácilmente la recíproca, es decir que una órbita cónica con un foco en el centro de masa sólo puede ocurrir en presencia de una interacción de cuadrado inverso. Para ello reemplazamos la ecuación de una cónica

$$\frac{2\kappa}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_o)$$

en la ecuación diferencial de las órbitas

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\left[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u\right]$$

Lo que nos conduce fácilmente a

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\ell^2 u^2}{2\kappa\mu}$$

que es la ecuación de una fuerza gravitatoria o electrostática.

Newton llegó a este mismo resultado por complicadas demostraciones geométricas. En la Proposición XI, Problema VI de la sección III (Movimiento de

Cuerpos en Secciones Cónicas Excéntricas) del Libro I de sus *Principia* (Primera edición de 1687), Newton demuestra que si una partícula se mueve en una órbita elíptica bajo la influencia de una fuerza dirigida hacia uno de los focos, entonces esta fuerza debe ser de cuadrado inverso. En la Proposición XII repite la demostración para órbitas hiperbólicas, y en la Proposición XIII completa la secuencia suponiendo una órbita parabólica. Finalmente, en el Corolario I de la Proposición XIII escribe

> De las tres últimas Proposiciones sigue que si un cuerpo P se mueve desde un lugar P con cualquier velocidad en la dirección de cualquier línea recta PR, y al mismo tiempo es urgida en por la acción de una fuerza centrípeta que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro, el cuerpo se moverá en una de las secciones cónicas, teniendo su foco en el centro de fuerza, e inversamente[2].

## 11.7 El último round de la pelea entre Newton y Hooke

## 11.8 ¿Quién ganó la apuesta de Sir Christophen Wren?.

## 11.9 Para saber más

Robert Weinstock: *Dismantling a centuries-old myth: Newton's Principia and inverse-square orbits*, Am. J. Phys. **50** (7), 610-617 (1982).

[2]From the three last Propositions it follows, that if any body P goes from the place P with any velocity in the direction of any right line PR, and at the same time is urged by the action of a centripetal force that is inversely proportional to the square of the distance of the places from the centre, the body will move in one of the conic sections, having its focus in the centre of force; and conversely.