# Capítulo 12

# Dispersión de Rutherford

## 12.1 Ernest Rutherford

## 12.2 El experimento de Geiger y Marsden

## 12.3 Sección eficaz diferencial

Veamos ahora si podemos intuir cómo fue que Rutherford interpretó los resultados obtenidos por Marsden. Tenemos un problema de colisiones caracterizado por un flujo $\mathbf{J}$ de partículas alfa de masa $m$ que inciden con velocidad $v_\infty$ sobre un blanco formado por $N$ centros de fuerza (los átomos de oro). El número $I$ de partículas detectadas por unidad de tiempo en un diferencial $d\Omega$ de ángulo sólido no es adecuado para describir el proceso de colisión, ya que siendo proporcional al flujo de proyectiles y al número de átomos del blanco, depende de las características particulares del experimento.

$$I\, d\Omega \propto J\, N$$

El factor de proporcionalidad debe ser un diferencial de igual orden, y lo llamaremos sección eficaz diferencial $d\sigma$

$$I = \frac{d\sigma}{d\Omega}\, J\, N$$

De esta ecuación vemos que la sección eficaz $d\sigma/d\Omega$ tiene unidades de área. Es claramente independiente de la intensidad del haz incidente, del número de partículas en el blanco o de la resolución del detector. Está definida exclusivamente por las características de la interacción entre cada proyectil y cada partícula del blanco y, eventualmente, es función de la masa $m$, de la velocidad $v_\infty$ y del ángulo de desviación $\theta$.

## 12.4 Definición clásica de la sección eficaz

Consideremos un proyectil que se acerca a un centro de fuerza con cierto apartamiento $\rho$ respecto de la trayectoria de colisión frontal, para luego ser desviado en un cierto ángulo $\theta$ por la acción del potencial central actuante $V(r)$. Supondremos que la relación entre el ángulo $\theta$ y el parámetro de impacto $\rho$ es "uno a uno", es decir que a cada valor de $\theta$ le corresponde un único valor de $\rho$. En este caso sólo aquellas partículas con parámetros de impacto entre $\rho$ y $\rho + d\rho$ serán dispersadas en el cono de ángulo sólido entre $\theta$ y $\theta + d\theta$. Por lo tanto $I\,d\Omega = J\,dA$ o, si consideramos $N$ centros dispersores, $I\,d\Omega = N\,J\,dA$. O sea

$$I\,2\pi\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta = N\,J\,2\pi\,\rho\,d\rho$$

y, por la definición de sección eficaz diferencial, tenemos finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{|\mathrm{sen}\theta|}\,\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right|$$

Vemos que el cálculo de la sección eficaz diferencial se ha reducido a considerar el problema de la dispersión de una partícula por un centro de fuerza, relacionando el parámetro de impacto $\rho$ con el ángulo de desviación $\theta$.

## 12.5 Dispersión de Rutherford (Parte I)

Como decíamos, bajo la acción de un potencial del tipo $Z/r$ el proyectil sigue una trayectoria hiperbólica. Escribimos la ecuación de una hipérbola en coordenadas polares $r$ y $\theta$ con origen en el centro de fuerza de la siguiente manera

$$\frac{r_o}{r} = \frac{\cos(\vartheta)\ -\ \cos(\vartheta_o)}{1\ -\ \cos(\vartheta_o)}$$

donde el ángulo polar $\vartheta$ está medido respecto de una línea por el punto de la curva más cercano al origen. $\vartheta_o$ es el ángulo entre este punto (ubicado a una distancia $r_o$ del origen) y el punto en el infinito, tal como muestra la figura. Este ángulo es menor o mayor que $\pi/2$ según que el potencial sea repulsivo o atractivo, respectivamente.

Para $\vartheta$ próximo a $\vartheta_o$ tenemos que $r = \rho\ /\ \mathrm{sen}(\vartheta_o\ -\ \vartheta)$, con $\rho$ el parámetro de impacto definido en la sección anterior. Reemplazando en la ecuación anterior, y tomando el límite $\vartheta \longrightarrow \vartheta_o$ obtenemos

$$\frac{r_o}{\rho} = \frac{\mathrm{sen}(\vartheta_o)}{1\ -\ \cos(\vartheta_o)}$$

Por otro lado, sabemos que el impulso angular $\ell = \rho\, m v_\infty$ y la energía $E = m\, v_\infty^2/2$ se conservan durante la colisión. O sea

$$\begin{aligned} \rho m v_\infty &= r_o m v_o \\ \frac{1}{2} m v_\infty^2 &= \frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{Z}{r_o} \end{aligned}$$

De las tres últimas ecuaciones podemos despejar la siguiente relación entre el parámetro de impacto $\rho$ y el ángulo $\vartheta_o$

$$\rho = \frac{Z}{m\, v_\infty^2} \mathrm{tg}(\vartheta_o)$$

En la figura vemos claramente que el ángulo $\vartheta_o$ está relacionado con el ángulo de desviación $\theta$ por $\theta = |\pi\, -\, 2\,\vartheta_o|$. Obtenemos finalmente

$$\rho = \frac{Z}{m\, v_\infty^2} \mathrm{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Reemplazando en la ecuación para la sección eficaz obtenemos la fórmula que Rutherford dedujo en 1911

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z}{2\, m\, v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{sen}^4(\theta/2)}$$

Debe notarse que la fórmula de Rutherford es independiente del signo de la carga $Z$, con lo cual el resultado es igualmente válido, ya sea para campos coulombianos repulsivos o atractivos. Este sorprendente resultado tiene la siguiente explicación. Vemos que el ángulo $\theta$ es negativo cuando $Z < 0$. Sin embargo, como el problema de colisión tiene simetría cilíndrica, podemos cambiar el signo de $\theta$ haciéndolo positivo. Pero justamente para el potencial coulombiano este "ángulo positivo" es el ángulo de desviación correspondiente a $Z > 0$, y por ello ambas secciones eficaces son iguales.

En general vamos a restringir el ángulo $\theta$ al rango entre 0 y $\pi$ por medio de operaciones de cambio de signo y resta de múltiplos enteros de $2\pi$. A este ángulo lo llamaremos "ángulo de dispersión".

## 12.6 Colisión de esferas rígidas

Cómo primera aplicación consideremos que tanto el blanco como el proyectil son esferas rígidas de radios $a_B$ y $a_P$, respectivamente. Ambos rebotan en forma especular, de manera tal que

$$\rho = a\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi\, -\, \theta}{2}\right) = a\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

con $a = a_B + a_P$, y reemplazando en una ecuación anterior para la sección eficaz obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{\rho}{|\mathrm{sen}(\theta)|}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \frac{a\cos(\theta\,/\,2)}{|\mathrm{sen}(\theta)|}\left|\frac{1}{2}\,a\,\mathrm{sen}(\theta/2)\right| = \frac{1}{4}\,a^2$$

Vemos que en este caso particular la dispersión es isotrópica. Los proyectiles tienen igual probabilidad de ser dispersados en cualquier dirección.

Si integramos esta sección eficaz diferencial obtenemos

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}}\,d\Omega_{CM} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega_{SL}}\,d\Omega_{SL} = \int \frac{d\sigma}{dT}\,dT = \pi\,a^2$$

que es precisamente el area lateral que el blanco enfrenta al haz incidente. Esta cantidad se denomina "sección eficaz total".

## 12.7 Sección eficaz total

Si el blanco enfrenta un area lateral $\sigma$ al haz incidente de flujo $J$, $J\sigma$ es el número total de partículas que por unidad de tiempo son afectadas por la presencia del blanco y dispersadas en todas direcciones. Multiplicando por el número total de blancos tenemos finalmente

$$\int I d\Omega = JN\sigma$$

Comparando con una expresión anterior vemos que el area $\sigma$ que el blanco enfrenta al haz incidente es, ni más ni menos, que la sección eficaz diferencial integrada sobre la esfera unidad

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

A esta cantidad la llamamos sección eficaz total y representa una medida del *area de impacto* sobre la cual debe caer el proyectil para ser dispersado. Por ejemplo, en la colisión entre esferas rígidas de radios $a_B$ y $a_P$, como la considerada anteriormente, la sección eficaz diferencial resulta ser igual a la sección transversal, $\sigma = \pi(a_B + a_P)^2$.

## 12.8 Cálculo de la sección eficaz para un potencial arbitrario

Al atacar el problema general surge la siguiente pregunta: Al comienzo de este capítulo vimos que, para calcular la sección eficaz diferencial $d\sigma\,/\,d\Omega$, basta con conocer la relación entre el ángulo de dispersión $\theta$ y el parámetro de impacto $\rho$. Sin embargo, uno puede imaginar que para obtener esta información es necesario calcular toda la trayectoria. ¿Será acaso que ésta redundancia de información es imprescindible para calcular la relación de dispersión?. En principio sólo necesitamos relacionar dos parámetros $\rho$ y $\theta$ que están definidos "mucho antes" y "mucho después" de la colisión. Entonces, ¿para qué conocer "toda" la trayectoria en sus más mínimos detalles?... Por suerte, tal como mostraremos en esta sección, es perfectamente posible obtener la relación de dispersión $\theta(\rho)$ "directamente" a partir del potencial $V(r)$ que caracteriza al campo central de fuerza, sin necesidad de conocer la trayectoria.

Para empezar observamos que, debido a la reversibilidad temporal de la mecánica clásica, toda trayectoria debe ser simétrica respecto de una línea por el punto más cercano al centro de fuerza. En la siguiente figura vemos que el ángulo de dicho perihelio está dado por $(\pi - \theta)/2$, con $\theta$ el ángulo de dispersión

El impulso angular $\ell = \rho m v_\infty$ y la energía $E = m\, v_\infty^2/2$ se conservan durante la colisión. O sea

$$
\begin{aligned}
\rho\, m\, v_\infty &= m\, r^2\, \frac{d\phi}{dt} \\
\frac{1}{2}\, m\, v_\infty^2 &= \frac{1}{2}\, m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) + V(r)
\end{aligned}
$$

Ahora eliminamos $dt$ de ambas ecuaciones para obtener la ecuación de las órbitas

$$
d\phi = \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho/r)^2 - 2\, V(r)\, /\, m\, v_\infty^2}}\, \frac{\rho\, dr}{r^2}
$$

Finalmente, integrando entre el punto en el infinito y el perihelio $r_o$ obtenemos

$$
\theta = \pi - 2 \int_{r_o}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho/r)^2 - 2\, V(r)\, /\, m\, v_\infty^2}}\, \frac{\rho\, dr}{r^2}
$$

donde el perihelio $r_o$ es un cero del radicando

$$
r_o^2 - \rho^2 - 2\, r_o^2\, V(r_o)\, /\, m\, v_\infty^2 = 0
$$

Estas últimas dos ecuaciones nos permiten calcular el ángulo de dispersión $\theta$ en términos del parámetro de impacto $\rho$, dando una resolución completa al problema de colisión.

## 12.9 Dispersión de Rutherford (Parte II)

La primer aplicación de la técnica desarrollada en la sección anterior servirá para saldar una deuda. Para calcular la sección eficaz para la dispersión por un potencial coulombiano habíamos usado el mismo método de cálculo utilizado por Rutherford en su trabajo de 1911, aclarando que ésta no era la forma en que el tema era presentado comúnmente en los libros de texto. Ahora haremos este cálculo. Reemplazando $V(r) = Z/r$ en la expresión general anterior y efectuando una integración elemental obtenemos el parámetro de impacto $\rho$ en función del ángulo de dispersión $\theta$.

$$\rho = \frac{Z}{m\, v_\infty^2} \operatorname{cotg}(\theta/2)$$

y con ello recuperamos la sección eficaz de Rutherford,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z}{2\, m\, v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4(\theta/2)}$$