Capítulo 15

Principio de D'Alembert

15.1 Principio de D'Alembert

En prácticamente cualquier sistema mecánica, además de las fuerzas que controlan su evolución, existen cierto número de *ligaduras* que constriñen su movimiento. Podemos imaginar algunos ejemplos sencillos de sistemas con ligaduras: dos cuerpos unidos por una barra rígida o un hilo inextensible, las cuentas de un ábaco ó las moléculas de un gas confinado en el interior de un recipiente.

Tal como veremos, podemos incorporar estas ligaduras en la descripción del sistema, sin necesidad de tener un conocimiento preciso de las fuerzas que las producen. Que un sistema esté constreñido por ligaduras indica que hay fuerzas presentes que no conocemos a priori. Para soslayar este desconocimiento, habremos de reformular la Mecánica de modo que estas fuerzas no aparezcan explícitamente.

Para ello, comencemos analizando un ejemplo muy sencillo. Consideremos dos masas M_1 y M_2 sobre dos planos inclinados lisos de ángulos α_1 y α_2 y unidas por un hilo inextensible como se muestra en la figura. Las fuerzas aplicadas sobre cada masa son el peso $M_i\mathbf{g}$ y dos fuerzas de ligadura, una producida por la reacción del plano $\tilde{\mathbf{f}}_i$ y otra ejercida por el hilo $\mathbf{f}_i$. La ecuación de Newton para cada masa se escribe

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = M_i\mathbf{g} + \tilde{\mathbf{f}}_i + \mathbf{f}_i$$

Consideremos ahora que congelamos el tiempo y efectuamos un desplazamiento diferencial arbitrario de ambas masas $\delta\mathbf{r}_1$ y $\delta\mathbf{r}_2$. Sumando sobre las dos masas del sistema obtenemos

$$\begin{aligned} \left(M_1\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \tilde{\mathbf{f}}_1 + \mathbf{f}_1\right).\delta\mathbf{r}_1 & \quad + \\ \left(M_2\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \tilde{\mathbf{f}}_2 + \mathbf{f}_2\right).\delta\mathbf{r}_2 & \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

Ahora pongamos ciertas restricciones sobre el desplazamiento $\delta\mathbf{r}_i$. Para empezar, podemos exigir que este desplazamiento sea a lo largo del correspondiente plano inclinado. En este caso, como la reacción entre el plano inclinado y la masa es perpendicular a aquella, $\tilde{\mathbf{f}}_i.\delta\mathbf{r}_i = 0$. Por lo tanto, podemos eliminar las reacciones del plano inclinado en la ecuación anterior,

$$\left(M_1\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \mathbf{f}_1\right).\delta\mathbf{r}_1 + \left(M_2\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \mathbf{f}_2\right).\delta\mathbf{r}_2 = 0$$

Por otro lado, sabemos que las fuerzas de vínculo $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ ejercidas por el hilo sobre ambas masas son de igual magnitud, y ambas apuntan hacia arriba ó hacia abajo de los planos inclinados. Para aprovechar este hecho, pedimos que el desplazamiento de ambas masas tambien sea de la misma magnitud, y que si uno apunta hacia abajo por el plano inclinado, el otro apunte hacia arriba. En otras palabras, estamos pidiendo que el desplazamiento no estire ni contraiga el hilo que conecta ambas masas. Con esta condición adicional sobre el desplazamiento, tenemos que $\mathbf{f}_1.\delta\mathbf{r}_1 = -\mathbf{f}_2.\delta\mathbf{r}_2$. Por lo tanto, podemos eliminar también la fuerza ejercida por el hilo en la ecuación anterior, escribiendo finalmente

$$\left(M_1\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{p}_1}{dt}\right).\delta\mathbf{r}_1 + \left(M_2\mathbf{g} - \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}\right).\delta\mathbf{r}_2 = 0$$

Vemos que con una elección "adecuada" del desplazamiento $\delta\mathbf{r}_i$ hemos logrado eliminar las fuerzas de ligadura en la ecuación anterior. En realidad, la información sobre las fuerzas de ligadura permanece en el hecho de que el desplazamiento elegido es *compatible con las ligaduras impuestas al sistema*. Quiero decir que no intenta forzar las ligaduras, empujando las masas en dirección al plano inclinado, o contrayendo o estirando el hilo que las une. Este tipo particular de desplazamiento se denomina *virtual*. Por desplazamiento virtual infinitesimal de un sistema entendemos una variación de su configuración como resultado de cualquier cambio infinitesimal arbitrario $\delta\mathbf{r}_i$ de sus coordenadas, compatible con las ligaduras impuestas al sistema, en un instante t. El nombre de *virtual* distingue este desplazamiento de cualquier desplazamiento *real* que se produzca en el sistema en un intervalo de tiempo dt durante el cual pueden haber variado las fuerzas y las ligaduras[1].

Generalizamos el resultado anterior. En la ecuación de Newton para la $i$ésima partícula de un sistema mecánico cualquiera, separamos las fuerzas de vínculo responsables de las ligaduras, escribiendo $d\mathbf{p}_i/dt = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i$. Consideremos ahora

[1] Que no varíe el tiempo es muy importante, ya que en caso contrario las fuerzas de ligadura podrían realizar un trabajo (virtual) no nulo. Esto ocurriría, por ejemplo, con una bolita obligada a moverse por un alambre móvil. Si se mantiene fijo el tiempo, un desplazamiento virtual de la bolita es necesariamente perpendicular a las fuerzas de reacción que, por lo tanto, no realizan trabajo. Si el desplazamiento es en el tiempo, puede tener una componente transversal que -ahora si- conduciría a un trabajo no nulo de la fuerza de ligadura.

un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_i$. Sumando sobre todas las partículas del sistema obtenemos

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i - \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) .\delta \mathbf{r}_i = 0$$

Puesto que el trabajo virtual neto de todas las fuerzas de ligadura actuantes sobre el sistema es cero $\sum_i \mathbf{f}_i.\delta \mathbf{r}_i = 0$, obtenemos

$$\sum_i \left(\mathbf{F}_i - \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) .\delta \mathbf{r}_i = 0$$

Esta ecuación se denomina *Principio de D'Alembert*. Como veremos más adelante, representa el primer paso en dirección a una muy importante simplificación de la Mecánica Newtoniana, lograda pocos años más tarde por otro frances, El conde Joseph-Louis Lagrange.

15.2 Interpretación estática del Principio de d'Alembert

Todos los cuerpos tienen una tendencia a permanecer en su estado de reposo ó de movimiento rectilineo y uniforme. Podemos pensar en esto como una resistencia inercial al cambio ó -en otras palabras- en una *fuerza inercial*. La forma más conocida de fuerza inercial es la fuerza centrífuga. En la ecuación de d'Alembert, la fuerza inercial $d\mathbf{p}_i/dt$ aparece en un pie de igualdad con la fuerza aplicada $\mathbf{F}_i$, reduciendo el problema dinámico a un problema estático. Esta interpretación fué ardientemente atacada por algunos autores, en particular por Heinrich Hertz quien en la introducción a su texto de Mecánica se pregunta:

> ...¿Es este modo de expresión admisible?. ¿No ésto que hoy llamamos fuerza centrífuga más que la inercia de la piedra?. Debemos concluir que la clasificación de la fuerza centrífuga como una fuerza no es adecuada; su nombre, tal como el de fuerza viva, debe verse como una herencia de tiempos pasados; y desde el punto de vista de la utilidad del uso de esta terminología es más fácil excusarse que justificarla.

Por otro lado, Arnold Sommerfeld defiende el uso de esta terminología afirmando que *el término fuerza centrífuga no necesita justificación puesto que descansa, como el concepto más general de fuerza inercial, en una clara definición.*

15.3 Ligaduras

No soy muy afecto a las clasificaciones taxonómicas, pero debo incluir aquí algunas palabrejas: Una ligadura se denomina *holónomas* cuando esta descrita por una ecuación que relaciona las coordenadas de las partículas y el tiempo de la forma $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., t) = 0$. En caso contrario se denomina *no-holónomas*. Un ejemplo sencillo de una ligadura holónoma lo constituye el caso de dos cuerpos unidos por una barra rígida de longitud ℓ, donde $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \ell$. Otro ejemplo obvio es el de una partícula obligada a moverse a lo largo de una curva o sobre una superficie. Por otra parte, las paredes de un recipiente conteniendo un gas es un ejemplo de una ligadura no-holónoma. Para un recipiente esférico de radio a escribiríamos la condición de ligadura como —r— ¡ a. Esta inecuación representa un buen ejemplo de un caso particular de ligadura no-holónoma, denominado *anholónoma*. Una condición de ligadura dada por ecuaciones diferenciales no integrables (como las de un disco de radio r rodando por un plano horizontal: , $dx = r\cos\theta\, d\phi$ $dy = r\mathrm{sen}\theta\, d\phi$) es otra forma de ligaduras no-holónomas, llamada *diferencial*.

Las ligaduras también se clasifican atendiendo a si son independientes del tiempo (*escleronómas*) o lo contienen explícitamente (*reónomas*). Un ejemplo de este último tipo de ligadura lo constituye una bolita deslizando por un alambre móvil.

En lo que sigue trabajaremos casi exclusivamente con ligaduras holónomas, para las cuales el trabajo virtual es nulo. Más adelante veremos algunas técnicas para lidiar con ligaduras no-holónomas diferenciales.

15.4 Principio de los Trabajos Virtuales

Para un sistema en equilibrio, el Principio de D'Alembert se reduce a la condición de que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea cero:

$$\sum_i \mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i = 0$$

Esta ley se conoce con el nombre de *Principio de los Trabajos Virtuales* y representa una de las herramientas más útiles para el estudio de tales sistemas. En el ejemplo, algo trivial, que analizamos en la sección anterior, esta ley nos indica que para que el sistema esté en equilibrio, debe darse una relación muy particular entre las masas y los ángulos de los planos inclinados

$$M_1 \mathrm{sen}\alpha_1 = M_2 \mathrm{sen}\alpha_2$$

Esta ecuación, denominada Principio del Plano Inclinado, fue descubierta por Simon Stevin (Brujas 1548 - Leyden 1620) mucho años antes que el desarrollo de la Mecánica Newtoniana. Este descubrimiento, notable para la época, lo realizó de una manera muy ingeniosa: Imaginó una cadena cerrada homogénea alrededor de un prisma triangular tal como se muestra en la figura. Desde el reposo, es intuitivamente claro que esta cadena debe permanecer en equilibrio. Pero entonces, sin alterar el equilibrio, podemos suprimir la parte simétrica de la cadena que cuelga entre ambos extremos inferiores del prisma. De esta manera, los dos trozos de cadena sobre ambos planos inclinados deben permanecer en equilibrio. De ahí que las masas deben estar en proporción a las longitudes de ambos planos inclinados $M_1/M_2 = \ell_1/\ell_2$. Y como, por simple geometría, $\ell_1 \text{sen}\alpha_1 = \ell_2 \text{sen}\alpha_2$, obtenemos el Principio del Plano Inclinado.

La deducción de Stevin es uno de los más valiosos documentos de la prehistoria de la mecánica y nos da un claro ejemplo sobre el proceso de formación de la ciencia a partir del conocimiento intuitivo. El mismo Stevin estaba tan orgulloso de su descubrimiento que el dibujo de la cadena cerrada alrededor del prisma, que figura en la portada de su obra *Hypomnemata mathematica* (Leiden, 1605), está encabezado por la frase: "La maravilla no es maravilla"[2].

15.5 Grados de libertad y variables generalizadas

Con la ecuación de d'Alembert hemos logrado desembarazarnos de las fuerzas de ligadura, pero pagando el precio de que los sumandos de dicha ecuación ya no son independientes, puesto que no lo son las variaciones $\mathbf{r}_i$. En el próximo capítulo veremos que esta dificultad puede salvarse introduciendo el concepto de *variable generalizada*.

Un sistema de N partículas, sin ligaduras, tiene $3N$ coordenadas independientes o *grados de libertad*. Si existen ligaduras holónomas expresadas por k ecuaciones, podremos eliminar k de las $3N$ coordenadas con lo que nos quedarán $3N - k$ coordenadas independientes[3]. Diremos que el sistema tiene $3N - k$ grados de libertad.

Esta eliminación se expresa introduciendo $3N - k$ nuevas variables independientes q_i en función de las cuales las antiguas coordenadas $\mathbf{r}_i$ están dadas por

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, ..., q_{3N-k}, t)$$

Cualquier tipo de magnitud puede servir como coordenada generalizada.

En nuestro ejemplo de las dos masas en los planos inclinados, tendríamos -en principio- seis coordenadas independientes. Sin embargo, hay varias ligaduras holónomas que limitan el movimiento. En primer lugar, este es supuestamente plano, lo cual reduce en dos el número de grados de libertad. Por otra parte, ambas masas están limitadas a moverse sobre la superficie de los planos inclinados y unidas por un hilo. Esto agrega otras tres condiciones de ligadura que nos dejan con un solo grado de libertad. Una posible coordenada generalizada podría ser la distancia s que recorre una de las dos masas por la superficie del correspondiente plano inclinado.

[2] Wonder en is ghenn wonder.

[3] Si las ligaduras son no-holónomas, es imposible emplear las ecuaciones que la expresan para eliminar las coordenadas independientes.

15.6 Para saber más

- F. Gantmacher: *Lectures in Analytical Mechanics* (Mir Publishers, Moscow, 1975). Un tratado conciso y claro de Mecánica Analítica.

- Ernst Mach: *Desarrollo Histórico - Crítico de la Mecánica* (Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1949), traducción de José Babini. Título original *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historich-kristisch dargestellt* (1883). Se puede hallar una interesante discusión del descubrimiento del Principio del Plano Inclinado por Stevin en las páginas 32 - 39.

- Arnold Sommerfeld: *Mechanics* (Academic Press, New York, 1956), traducción al inglés de Martin O. Stern de la versión original alemana (Leipzig, 1943).