Capítulo 16

Ecuación de Lagrange

16.1 Introducción a las ecuaciones de Lagrange

La mecánica que nos presenta Lagrange en su *Mécanique Analytique* significa un salto conceptual muy grande respecto de la formulación Newtoniana. El concepto de *fuerza*, central en el tratamiento dado por Newton, prácticamente desaparece de la escena. En las próximas clases nos iremos despidiendo de él, y sólo aparecerá esporádicamente. Poco a poco será reemplazado por la idea de función *potencial* en el marco de un tratamiento que podríamos llamar *energético*.

Lo que quiero ahora es dar algunos pasos que nos acerquen a la difícil formulación de Lagrange de la Mecánica. Consideremos el movimiento de una partícula en un plano bajo la acción de una fuerza $\mathbf{F}$. Escribimos la ecuación de Newton en coordenadas polares:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \mathbf{F}.\hat{\mathbf{r}}$$
$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = \mathbf{F}.\hat{\theta}$$

Queremos construir una formulación energética, en el sentido de que podamos partir de la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

y llegar a las ecuaciones de Newton, por medio de algún operador D tal que, por ejemplo, $DT = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2$. Notablemente, esta no es una tarea muy complicada. Trabajando un poco dicho término,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\dot{r}}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2\right)$$

podemos escribir la componente radial de la ecuación de Newton en términos de la energía cinética como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = \mathbf{F}.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$$

Un cálculo similar permite demostrar que la componente angular de la ecuación de Newton es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \mathbf{F}.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$$

Bueno, parece que hemos encontrado algo interesante. Podemos escribir ambas como una sola, en términos de la coordenada $q = r$ ó θ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \mathbf{F}.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}$$

Esta es la em ecuación de Lagrange, con la cual trabajaremos de aquí en adelante ad nauseam. La demostración que hemos hecho es completamente correcta, pero deja en el tintero un aspecto muy importante. Aquí, hemos trabajado con una única partícula, donde la fuerza **F** incluye “todas” las interacciones que actúan sobre ella, incluidas las fuerzas de vínculo. Pero d’Alembert ya hizo el gasto de eliminar las fuerzas de ligadura de la mecánica, y no sería muy astuto de nuestra parte ignorar este resultado. Ahora vamos a deducir las ecuaciones de Lagrange a partir del Principio de d’Alembert, demostrando que aquellas valen para todo el sistema (no sólo una partícula) y para cualquier coordenada generalizada q compatible con los grados de libertad del sistema, sin tener en cuenta explícitamente las fuerzas de vínculo.

16.2 Ecuaciones de Lagrange

Trabajaremos sobre la ecuación de d’Alembert para un sistema arbitrario de N partículas

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{F}_i - \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}\right).\delta\mathbf{r}_i = 0$$

Recordemos que con esta ecuación hemos logrado desembarazarnos de las fuerzas de ligadura, pero pagando el precio de que los sumandos de dicha ecuación ya no son independientes, puesto que -habiendo un cierto número k de ligaduras holónomas- ahora no son independientes las variaciones $\mathbf{r}_i$. Ahora vamos a salvar esta dificultad, escribiendo la ecuación de d’Alembert en términos de las $3N-k$ coordenadas generalizadas q_j del sistema[1], en función de las cuales las antiguas coordenadas $\mathbf{r}_i$ están dadas por

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, ..., q_{3N-k}, t)$$

[1]La elección de las $3N-k$ coordenadas generalizadas de un sistema no es única, por lo cual tampoco son únicas las ecuaciones de Lagrange.

Nuestro objetivo es demostrar que, en términos de estas coordenadas generalizadas, que el principio de d'Alembert se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i.\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right].\delta q_j=0$$

Supongamos, por ahora, que ya logramos demostrar esta ecuación (lo haremos en la próxima sección). Si las ligaduras son holónomas (y tal condición se utiliza recién ahora, no siendo imprescindible para la demostración anterior), las coordenadas generalizadas q_j son independientes y, por lo tanto, la única manera de que se cumpla la ecuación de d'Alembert es que se anule cada coeficiente por separado.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j=0$$

donde hemos definido la *fuerza generalizada*

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i.\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Supongamos ahora que algunas de las fuerzas aplicadas sobre el sistema derivan de una función potencial V que es la energía potencial del sistema, $\mathbf{F}_i=\tilde{\mathbf{F}}_i-\nabla_i V$. En dicho caso podemos escribir

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\mathbf{F}}_i.\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{N}\nabla_i V.\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}=\tilde{Q}_j-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, podemos incorporar el potencial en el primer término,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_j}=\tilde{Q}_j$$

Como el potencial V solo depende de la posición, debe ser independiente de las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$. Por ello podemos incluir el potencial V en la derivada parcial respecto de $\dot{q}_j$, obteniendo la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}=\tilde{Q}_j$$

donde hemos definido el *Lagrangiano* $\mathcal{L}=T-V$.

16.3 Demostración de las ecuaciones de Lagrange

Nos falta demostrar la ecuación

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right].\delta q_j=0$$

A partir del principio de d'Alembert.

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{F}_i-\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}\right).\delta\mathbf{r}_i$$

¡Manos a la obra!... En función de las coordenadas generalizadas, el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas es

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i.\sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_{j=1}^{3N-k}Q_j.\delta q_j$$

Ya tenemos un buen trozo de la demostración lista. Lo que falta no va a ser tan fácil,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.\delta\mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\mathbf{r}}_i.\delta\mathbf{r}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\mathbf{r}}_i.\sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_{j=1}^{3N-k}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\mathbf{r}}_i.\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j\\ &= \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i.\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)-\dot{\mathbf{r}}_i.\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j\end{aligned}$$

Ahora bien, por un lado tenemos que

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\sum_{k=1}^{3N-k}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}+\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}\right)=\sum_{k=1}^{3N-k}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k}\delta_{jk}+0=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

y por otro

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{k=1}^{3N-k}\frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q_j\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}+\frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q_j\partial t}=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\right)=\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$$

Reemplazando en la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.\delta\mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\mathbf{r}}_i.\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-m_i\dot{\mathbf{r}}_i.\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}\right).\delta q_j\\ &= \sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right)\right].\delta q_j\\ &= \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right)\right)-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right)\right].\delta q_j\\ &= \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right].\delta q_j\end{aligned}$$

Con esto completamos la demostración.

16.4 No unicidad del Lagrangiano

Es importante destacar que el Lagrangiano de un sistema no es único. En primer lugar, es fácil verificar que si se cambia $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L} + \lceil \} / \lceil \sqcup$, con g cualquier función de las coordenadas generalizadas q_j y del tiempo t, la solución de la ecuación de Lagrange permanece inalterada. Esta propiedad puede resultar muy útil para simplificar el aspecto funcional de un Lagrangiano.

Por otra parte, puede verificarse fácilmente que el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -112 m^2 \dot{q}^4 + m\dot{q}^2 V(q) + V^2(q)$$

conduce a la misma solución $m\ddot{q} = -dV/dq$ del problema unidimensional general que el Lagrangiano usual

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q)$$