Capítulo 17

Fuerzas y potenciales, III

17.1 Potencial de Schering

Puede ocurrir que entre entre las fuerzas generalizadas haya alguna que, sin ser conservativas en el sentido usual, pueda obtenerse a partir de un potencial dependiente de la velocidad $V = V(q_j, \dot{q}_j)$ de la siguiente manera

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

En tal caso, el potencial puede incorporarse en el Lagrangiano, recuperando la ecuación de Lagrange en su forma usual.

Podría pensarse que esta es una situación puramente académica, pero no es así. Supongamos que tenemos una partícula cargada q en presencia de un campo electromágnetico $[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]$. Sobre esta partícula actúa la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \xi\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$$

donde ξ es una constante de proporcionalidad igual a 1 en el sistema internacional y a $1/c$ en el sistema gaussiano. Esta fuerza no es conservativa en el sentido usual. Sin embargo, veremos que es posible definirle un potencial dependiente de la velocidad, adaptando así el electromagnetismo al formalismo Lagrangiano. El primero que intentó incluir este tipo de fuerzas en la mecánica fue el matemático alemán E. Schering en el año 1873 (Gött. Abh. **18**, 3). Por este motivo E. T. Whittaker, en la primera edición de su libro *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies* (1904), denominó *potencial de Schering* a este tipo de funciones potencial dependientes de la velocidad. Sin embargo, con el tiempo esta denominación ha caido en desuso.

Los vectores de campo eléctrico y magnético satisfacen cierto número de ecuaciones, denominadas ecuaciones de Maxwell. No quiero robarle tema al curso de electromagnetismo, así que me restringiré a anotar aquellas dos que necesitaré aquí: Estas son la ley de Conservación del flujo

$$\nabla.\mathbf{B} = 0$$

y la Ley de Faraday[1].

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\xi \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

La ley de conservación de flujo nos dice que $\mathbf{B}$ es un campo de divergencia nula. Por lo tanto podemos definir un potencial vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Reemplazando en la ley de Faraday obtenemos que $\nabla \times (\mathbf{E} + \xi \partial \mathbf{A}/\partial t) = 0$, por lo cual también podemos definir un potencial escalar ϕ tal que $\mathbf{E} + \xi \partial \mathbf{A}/\partial t = -\nabla \phi$. Vemos entonces que ambos campos pueden generarse a partir de sendos potenciales[2] escalar ϕ y vectorial $\mathbf{A}$ como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{E} = -\nabla \phi - \xi \partial A/\partial t$.

En función de estos potenciales, la fuerza de Lorentz adopta la forma

$$\mathbf{F} = q \left(-\nabla \phi - \xi \frac{\partial A}{\partial t} + \xi \, \dot{\mathbf{r}} \times \nabla \times \mathbf{A} \right)$$

Un poco de algebra vectorial permite convertir esta ecuación en

$$F_x = q \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi - \xi \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{A} \right) - \xi \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}) \right) \right]$$

con expresiones similares para las componentes x e y. Como el potencial escalar es independiente de la velocidad, esta expresión es equivalente a

$$F_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial V}{\partial x}$$

donde

$$V = q\phi - \xi q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}$$

Por lo tanto, el Lagrangiano de una partícula cargada en un campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = T - q\phi + \xi q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}$$

[1]Las otras dos leyes son la denominada Ley de Poisson y la Ley de Ampere. Ambas dependen de las cargas y corrientes que generan el campo

[2]Sin embargo los potenciales no están completamente definidos por estas ecuaciones. En particular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ quedan inalterados ante una sustitución de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A} + \nabla \psi$ y ϕ por $\phi - \xi \partial \psi/\partial t$, con ψ cualquier campo escalar. Esta propiedad se denomina invariancia de gauge o de medida y nos permite imponer una condición adicional sobre A. Por ejemplo, podemos pedir que $\nabla.\mathbf{A} = 0$, condición que se llama de gauge coulombiano o transversal. Cuando $\mathbf{A}$ satisface esta elección de gauge, $\phi = 0$ y con ello resulta $\mathbf{E} = -\xi \partial \mathbf{A}/\partial t$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

17.2 Potenciales no inerciales

Consideremos las tres fuerzas ficticias que se incorporan en las ecuaciones de movimiento cuando se lo basa en un sistema de referencia no inercial de velocidad angular $\vec{\omega}$

$$m\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathrm{O}'} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{coriolis}} + \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} + \mathbf{F}_{\text{aceleración}}$$

donde

$$\begin{array}{lll} \mathbf{F}_{\text{coriolis}} & = -2\,m\,\vec{\omega}\,\times\dot{\mathbf{r}} & \text{Fuerza de Coriolis} \\ \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} & = -\,m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}) & \text{Fuerza centrífuga} \\ \mathbf{F}_{\text{aceleración}} & = m\,\mathbf{r}\times\dot{\vec{\omega}} & \end{array}$$

Vemos que la fuerza centrífuga puede escribirse en términos de un potencial escalar. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} &= -\,m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}) = m\omega^2\,\mathbf{r} - m(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r})\,\vec{\omega} \\ &= m\,\frac{1}{2}\left(\omega^2\nabla r^2 - \nabla(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r})^2\right) = \frac{m}{2}\,\nabla\left((\omega\, r)^2 - (\vec{\omega}\cdot\mathbf{r})^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\,\nabla\,(\vec{\omega}\times\mathbf{r})^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, puesto que

$$\nabla\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}) = \vec{\omega}\;(\nabla\cdot\mathbf{r}) - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\;\mathbf{r} = 2\,\vec{\omega}$$

podemos escribir la fuerza de Coriolis como

$$\mathbf{F}_{\text{coriolis}} = -2\,m\,\vec{\omega}\,\times\dot{\mathbf{r}} = m\,\dot{\mathbf{r}}\times(\nabla\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}))$$

Finalmente, incorporando la fuerza de aceleración

$$\mathbf{F}_{\text{aceleración}} = m\,\mathbf{r}\times\dot{\vec{\omega}} = -\,m\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{\omega}\times\mathbf{r})$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{no inercial}} &= \mathbf{F}_{\text{centrífuga}} + \mathbf{F}_{\text{aceleración}} + \mathbf{F}_{\text{coriolis}} \\ &= m\left(-\nabla\,\frac{1}{2}\,(\vec{\omega}\times\mathbf{r})^2 - \frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{\omega}\times\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{r}}\times(\nabla\times(\vec{\omega}\times\mathbf{r}))\right) \end{aligned}$$

Esta expresión tiene una forma idéntica a la de la fuerza de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q\left(-\nabla\phi - \xi\frac{\partial A}{\partial t} + \xi\,\dot{\mathbf{r}}\times\nabla\times\mathbf{A}\right)$$

si ponemos $\xi = 1$, reemplazamos $q = m$, y definimos los potenciales escalar y vectorial

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}\times\mathbf{r}\right)^2 \\ \mathbf{A} &= \vec{\omega}\times\mathbf{r} \end{aligned}$$

Obtenemos finalmente el siguiente potencial de Schering

$$V_{\text{no inercial}} = \frac{m}{2}\left(\vec{\omega}\times\mathbf{r}\right)^2 - m\,\dot{\mathbf{r}}\times\left(\vec{\omega}\times\mathbf{r}\right)$$

asociado a un sistema no inercial de velocidad angular $\vec{\omega}$. Con este resultado, no sólo podemos utilizar las ecuaciones de Lagrange en un sistema no inercial, sino que hemos encontrado una interesante analogía entre las fuerzas no inerciales, y las electromagnéticas.

17.3 Función de disipación de Rayleigh

Tal como vimos en una sección anterior, en algunos casos las fuerzas de rozamiento son proporcionales a la velocidad de la partícula (Ley de Stokes)

$$F_x = -k_x\dot{x}$$

En esta situación se suele definir una función

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\mathbf{F}.\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(k_x\dot{x}_i^2 + k_y\dot{y}_i^2 + k_z\dot{z}_i^2)$$

relacionada con la potencia disipada por la fuerza de rozamiento

$$\frac{dW}{dt} = -\mathbf{F}.\dot{\mathbf{r}} = 2\mathcal{F}$$

Esta función $\mathcal{F}$ se denominada *Función de disipación de Rayleigh*, y verifica que $\mathbf{F} = -\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\mathcal{F}$. La fuerza generalizada relacionada con la fuerza de rozamiento está dada por

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i.\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{N}\nabla_{\dot{\mathbf{r}}_i}\mathcal{F}.\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_j} = -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{q}_j}$$

Con lo cual, la ecuación de Lagrange se escribe

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{q}_j} = \tilde{Q}_j$$

17.4 Tratamiento de los vínculos anholónomos

Al deducir la expresión en coordenadas generalizadas del Principio de d'Alembert

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}-\tilde{Q}_j\right].\delta q_j=0$$

no impusimos ninguna condición sobre las ligaduras. Sólo en la etapa final de la demostración supusimos que todas las ligaduras eran holónomas. En ese caso las variaciones de las coordenadas generalizadas son independientes entre sí y podemos igualar a cero cada término de la sumatoria, obteniendo las ecuaciones de Lagrange. Si además de los k vínculos holónomos existen m ligaduras anholónomas, las coordenadas generalizadas dejan de ser independientes. Aún así es posible operar con las ecuaciones de Lagrange, siempre que los vínculos sean diferenciales y puedan escribirse por medio de ecuaciones lineales de primer orden

$$\sum_{j=1}^{3N-k} a_{\ell j}dq_j + a_{\ell t}dt = 0$$

donde $\ell = 1, ..., m$ y los coeficientes a son funciones de las coordenadas generalizadas y del tiempo. Los desplazamientos virtuales deben satisfacer ecuaciones de ligadura del tipo

$$\sum_{j=1}^{3N-k} a_{\ell j}\delta q_j = 0$$

Ahora vamos a hacer un par de pases mágicos. Multiplicamos cada una de estas m condiciones de ligadura por un factor arbitrario λ_ℓ, en general dependiente de las coordenadas y del tiempo, las sumamos y se lo agregamos a la ecuación de d'Alembert

$$\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}-\tilde{Q}_j-\sum_{\ell=1}^{m}\lambda_\ell a_{\ell j}\right].\delta q_j=0$$

Por ahora no he hecho más que sumar dos ceros. Por supuesto que no he ganado mucho. Sólo $3N-k-m$ variaciones δq_j (por ejemplo, las correspondientes a $j = 1, ..., 3N-k-m$) son independientes. Las restantes variaciones δq_j con $j = 3N-k-m+1, ..., 3N-k$ están determinadas por las condiciones de ligadura anholónomas $\sum_{j=1}^{3N-k} a_{\ell j}\delta q_j = 0$. Así que no puedo anular cada término de la sumatoria por separado para obtener las ecuaciones de Lagrange. Pero lo que puedo hacer es aprovechar que los m factores λ_ℓ son arbitrarios, y elegirlos de manera tal que se anulen m coeficientes de la ecuación. Por ejemplo, elijo estos factores de forma que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}-\tilde{Q}_j-\sum_{\ell=1}^{m}\lambda_\ell a_{\ell j}=0 \qquad \text{para} \qquad j=3N-k-m+1,...,3N-k$$

En la ecuación de d'Alembert quedan ahora $3N - k - m$ sumandos

$$\sum_{j=1}^{3N-k-m} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \tilde{Q}_j - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell j} \right] .\delta q_j = 0$$

Ahora si, como estos $3N - k - m$ desplazamientos virtuales δq_j SON independientes, deben ser nulos los correspondientes coeficientes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \tilde{Q}_j - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell j} = 0 \qquad \text{para} \qquad j = 1, ..., 3N - k - m$$

Uniendo ambos resultados, hemos logrado recuperar las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \tilde{Q}_j - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell j} = 0 \qquad \text{para} \qquad j = 1, ..., 3N - k$$

al precio de introducir un conjunto de m factores arbitrarios λ_ℓ. Pero con esto no terminan nuestros problemas, ya que ahora estos m factores se agregan como incógnitas del problema. En otras palabras, tenemos $3N - k + m$ incógnitas (las $3N - k$ coordenadas generalizadas q_j y los m factores λ_ℓ) y sólo $3N - k$ ecuaciones de Lagrange. Esto se soluciona agregando las m condiciones de vínculo

$$\sum_{j=1}^{3N-k} a_{\ell j} \dot{q}_j + a_{\ell t} = 0$$

17.5 Interpretación de los multiplicadores de Lagrange

Con el método descrito en la sección anterior, nos hemos encontrado con que las ecuaciones de Lagrange nos dan más información que la que buscabamos. No sólo hemos hallado las coordenadas generalizadas q_j, sino también los m factores λ_ℓ, denominados *multiplicadores de Lagrange*. ¿Cuál es el significado físico de estos factores?. Mirando fijo las ecuaciones de Lagrange anteriores, resulta evidente que aparecen como algún tipo de fuerza generalizada

$$\hat{Q}_j = \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell j}$$

asociada con la ligadura anholónoma. ¡Sorpresa!... Para poder introducir las ligaduras anholónomas en la formulación de Lagrange, lo que hemos hecho es dar un paso atrás. No hemos eliminado las fuerzas de ligadura de la formulación, y las recuperamos como parte de la solución del problema.

Esto es realmente muy interesante. Las ecuaciones de Lagrange en su forma usual, no nos da información sobre las fuerzas de ligadura. Pero puede ocurrir que sea justamente esa información lo que estamos buscando en un dado problema. Por ejemplo, en el diseño de un puente colgante, podemos estar interesados en conocer la fuerza que va a tener que soportar alguno de los cables de la enarboladura. En ese caso, el método de los multiplicadores de Lagrange nos provee de un método para obtener esa fuerza, sin necesidad de complicarse la vida con las ecuaciones de Newton. La idea es muy simple. Aunque en este punto hay que andar con mucho cuidado, ya que -para poder obtener la fuerza de vínculo- vamos a ignorar una de las k ligaduras holónomas del problema, y por lo tanto estamos agrega una coordenada generalizada más a las $3N-k$ que teníamos antes. Ahora el truco es separar aquella condición de ligadura para la cual queremos conocer la fuerza de vínculo,

$$f(q_1,...,q_{3N-k},q_{3N-(k-1)}t) = 0$$

y, en lugar de incorporarla directamente en el cálculo, escribirla en forma diferencial

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

e incorporarla como una ligadura anholónoma definiéndole un multiplicador de Lagrange λ con coeficientes $a_j = \partial f/\partial q_j$ y $a_t = \partial f/\partial t$.