Capítulo 18

Teoremas de conservación

18.1 Teorema general de conservación

Comenzamos con una definición:

> Si el Lagrangiano de un sistema no incluye una coordenada generalizada q_j (aunque puede contener su derivada temporal $\dot{q}_j$), decimos que esa coordenada es *cíclica* ó *ignorable*

y seguimos con un teorema

> **Teorema de Woother**: El *momento canónico* ó *conjugado* $p_j = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$ de una coordenada cíclica q_j se conserva.

La demostración de este teoremita es muy fácil. Partiendo de la ecuación de Lagrange para q_j vemos que

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{dp_j}{dt} - 0$$

con lo cual p_j es constante.

Este modesto teorema es de una gran sencillez. Sin embargo es un de los resultados más importantes de la mecánica clásica. Dentro de un momento comenzaremos a apreciar su gran importancia, que será absolutamente evidente más adelante, sobre todo al estudiar Física Cuántica.

18.2 Coordenadas de traslación y rotación

Analizemos un poco más en detalle las características de este momento conjugado en dos casos particulares. Supongamos que q_j es tal que δq_j representa únicamente una traslación del sistema en su conjunto en una dirección $\hat{n}$ arbitraria. Un ejemplo podría ser una de las coordenadas cartesianas del centro de masa del sistema. Tenemos que

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Supongamos ahora que q_j es una coordenada de translación, es decir tal que δq_j representa únicamente una traslación del sistema en su conjunto en una dirección $\hat{n}$ arbitraria. Un ejemplo podría ser una de las coordenadas cartesianas del centro de masa del sistema. En ese caso tenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \lim \frac{\mathbf{r}_i(q_1, ..., q_j + \delta q_j, ..., q_{3N-k}, t) - \mathbf{r}_i(q_1, ..., q_j, ..., q_{3N-k}, t)}{\delta q_j} = \frac{\delta q_j . \hat{n}}{\delta q_j} = \hat{n}$$

y -por lo tanto- p_j resulta ser igual al impulso total del sistema en la dirección $\hat{n}$

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i . \hat{n} = \mathbf{P} . \hat{n}$$

Por otra parte, si q_j es tal que δq_j representa una rotación alrededor del eje $\hat{n}$, entonces puede demostrarse que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \hat{n} \times \mathbf{r}_i$$

y reemplazando en

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

obtenemos que p_j es igual a la componente del impulso angular total en la dirección $\hat{n}$,

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i . (\hat{n} \times \mathbf{r}_i) = \hat{n} . \mathbf{L}$$

Con estos dos resultados concluimos que

- Si una coordenada de traslación es cíclica se conserva la componente del impulso total según la dirección de traslación.

- Si una coordenada de rotación es cíclica se conserva la componente del momento angular según la dirección de rotación.

18.3 Propiedades de simetría

En general, no es necesario calcular explícitamente el Lagrangiano para saber si una dada coordenada es cíclica o no. Muchas veces, basta con descubrir las propiedades de simetría del sistema. Por ejemplo, si un sistema es *invariante* respecto a una translación en una dirección dada, entonces esa coordenada de traslación no va a aparecer en el Lagrangiano. En otras palabras, esa coordenada de traslación es cíclica y se conserva el impulso total correspondiente. Similarmente, si un sistema es invariante respecto de una rotación dada, se conserva el momento angular correspondiente. En particular, en un sistema de simetría esférica se conservan todas las componentes del impulso angular.

18.4 Coordenadas cíclicas y fuerzas generalizadas

Utilizando la ecuación de Lagrange tenemos que

$$\dot{p}_j = \frac{dp_j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Pero es evidente que si una coordenada q_j es tal que δq_j representa un desplazamiento (traslación ó rotación) del sistema en su conjunto, no aparece en la expresión de la energía cinética, pues las velocidades no se alteran al desplazar el sistema como un todo. En tal caso tenemos que

$$\dot{p}_j = Q_j$$

De manera tal que la conservación del momento conjugado de una coordenada cíclica implica que se anula la fuerza generalizada correspondiente.

Utilizando la definición de fuerza generalizada,

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i . \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

obtenemos que Q_j es igual a la componente en la dirección $\hat{n}$ de la fuerza total aplicada sobre el sistema para una coordenada de traslación en dicha dirección

$$Q_j = \mathbf{F}.\hat{n}$$

e igual a la componente en la dirección $\hat{n}$ del momento de fuerzas total para una coordenada de rotación alrededor de dicha dirección

$$Q_j = \mathbf{M}.\hat{n}$$

con lo cual, como $p_j = \mathbf{P}.\hat{n}$ para una traslación y $p_j = \mathbf{L}.\hat{n}$ para una rotación, y siendo la dirección $\hat{n}$ arbitraria, obtenemos $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$ y $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$. Vemos entonces que la ecuación $\dot{p}_j = Q_j$ es una evidente generalización de la segunda ley de Newton, donde uno ya presentía una cierta simetría entre las ecuaciones correspondientes a traslación y rotación, tanto para partículas individuales como para sistemas complejos.

18.5 Conservación del Hamiltoniano

Hasta ahora hemos encontrado una generalización de los teoremas de conservación del impulso y el momento angular. Ahora queremos investigar si existe una generalización similar del teorema de conservación de la energía. Para ello comenzamos calculando la derivada total respecto del tiempo del Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\
&= \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \tilde{Q}_j \right)\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\
&= \sum_{j=1}^{3N-k} \left(\dot{p}_j - \tilde{Q}_j\right)\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3N-k} p_j\ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\
&= -\sum_{j=1}^{3N-k} \tilde{Q}_j\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{d}{dt}\left(p_j\dot{q}_j\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Este resultado nos lleva a definir el *Hamiltoniano* de un sistema

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{3N-k} \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}$$

de manera tal que

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{3N-k} \tilde{Q}_j\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Si imponemos la condición de trabajar en un sistema conservativo, en el sentido de que todas las fuerzas se pueden deducir de un potencial, resulta

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Esto nos provee un nuevo teorema de conservación

> Si el tiempo es una coordenada cíclica, entonces se conserva el Hamiltoniano

18.6 Conservación de la Energía

Escribamos la energía cinética en función de las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$. Tenemos que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \\ &= b + \sum_{j=1}^{3N-k} b_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{\ell=1}^{3N-k} b_{j\ell}\dot{q}_j\dot{q}_\ell \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$b = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}\right)^2 \quad , \quad b_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad , \quad b_{j\ell} = \frac{1}{2}\sum_{i1}^{N} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

Si las ligaduras no contienen explícitamente al tiempo, es decir, si son esclerónomas, entonces $\partial \mathbf{r}_i/\partial t = 0$ y la energía cinéticas será una forma cuadrática homogénea respecto de las velocidades generalizadas

$$T = \sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{\ell=1}^{3N-k} b_{j\ell}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{3N-k} \left(2\sum_{\ell=1}^{3N-k} b_{j\ell}\dot{q}_\ell \right)\dot{q}_j - \mathcal{L} \\ &= 2\sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{\ell=1}^{3N-k} b_{j\ell}\dot{q}_\ell\dot{q}_j - \mathcal{L} = 2T - \mathcal{L} = T + V = E \end{aligned}$$

O sea que

> La constancia del Hamiltoniano para vínculos esclerónomos (independientes del tiempo) implica la conservación de la energía mecánica total

Debe tenerse en claro que la identificación de $\mathcal{H}$ como una constante de movimiento y como la energía son dos cosas diferentes y las condiciones para una no bastan para la otra. Puede ocurrir que el tiempo aparezca explícitamente en las ecuaciones de transformación $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q,t)$ y no en $\mathcal{H}$. En tal caso $\mathcal{H}$ es una constante de movimiento, pero no es la energía total.