Capítulo 19

Las ecuaciones de Hamilton

19.1 Las ecuaciones canónicas ó de Hamilton

Las ecuaciones de Lagrange para un sistema de $3N - k$ grados de libertad da como resultado un conjunto de $3N - k$ ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. Ahora veremos que se puede reducir el orden de las ecuaciones diferenciales, aunque duplicando su número. Para comprender claramente esta idea, consideremos un problema unidimensional general, caracterizado por el Lagrangiano $\mathcal{L} = m\dot{q}^2/2 - V(q)$. La ecuación de Lagrange nos conduce a la segunda ley de Newton $m\ddot{q} = -\partial V/\partial q$, que es una ecuación diferencial de segundo grado para la función $q(t)$. Ahora bien, el momento conjugado es $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q} = m\dot{q}$. Entonces la idea es reemplazar la ecuación de Newton por dos ecuaciones acopladas de primer orden para las funciones $q(t)$ y $p(t)$

$$\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q} \qquad , \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

Podemos escribir estas ecuaciones en una forma más simétrica, en términos del Hamiltoniano $\mathcal{H} = \dot{q}p - \mathcal{L} = p^2/2m + V(q)$ que, pensado como función de q, p y t nos conduce a

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \qquad , \qquad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$$

Vemos que, en efecto, hemos reducido el orden de las ecuaciones diferenciales, pero a costa de duplicar su número.

Ahora quisiéramos generalizar este resultado para un sistema cualquiera donde, en lugar de trabajar con un conjunto de $3N - k$ ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden para las funciones $q_1(t)$, ..., $q_{3N-k}(t)$, lo haríamos con $2(3N - k)$ ecuaciones de primer orden para $q_1(t)$, ..., $q_{3N-k}(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_{3N-k}(t)$. Vamos a ver que las expresiones anteriores proveen una manera directa de lograr tal generalización. Para ello trabajaremos con el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{3N-k} \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}$$

como función, ya no deq_1, ..., q_{3N-k}, $\dot{q}_1$, ..., $\dot{q}_{3N-k}$ y t, sino de q_1, ..., q_{3N-k}, p_1, ..., p_{3N-k} y t. Para ello debemos pensar a las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$ como funciones de estas variables. Calculamos ahora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{\ell=1}^{3N-k} \dot{q}_\ell p_\ell - \mathcal{L}\right) = \sum_{\ell=1}^{3N-k} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_j} p_\ell - \sum_{\ell=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell}\frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{3N-k}\left(p_\ell - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell}\right)\frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}
\end{aligned}$$

Y aplicando la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = \tilde{Q}_j - \frac{dp_j}{dt}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_{\ell=1}^{3N-k} \dot{q}_\ell p_\ell - \mathcal{L}\right) = \dot{q}_j + \sum_{\ell=1}^{3N-k} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_j} p_\ell - \sum_{\ell=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell}\frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_j} \\
&= \dot{q}_j + \sum_{\ell=1}^{3N-k}\left(p_\ell - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\ell}\right)\frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_j} = \dot{q}_j + 0
\end{aligned}$$

Recuperamos así las ecuaciones que habíamos hallado en el caso unidimensional, excepto por la aparición del término $\tilde{Q}_j$ correspondiente a las fuerzas no conservativas.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j - \dot{p}_j \qquad , \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j$$

Estas ecuaciones son de una engañosa simplicidad. Por ejemplo, si volvemos a mirar la deducción de la segunda ecuación, vemos que -en la práctica- es casi una tautología. La dificultad práctica está en calcular el Hamiltoniano del sistema como función, no de las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$, sino de los momentos conjugados p_j. Para ello, es necesario encontrar una expresión que relacione ambos conjuntos de variables. Pero eso ya lo hicimos en la sección anterior. A partir de la expresión para la energía cinética

$$T = b + \sum_{j=1}^{3N-k} b_j \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3N-k}\sum_{\ell=1}^{3N-k} b_{j\ell}\dot{q}_j\dot{q}_\ell$$

vemos que, para el caso de potenciales independientes de la velocidad, las velocidad generalizadas y los momentos conjugados están relacionados por una transformación lineal

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = b_j + \sum_{\ell=1}^{3N-k} b_{j\ell}\dot{q}_\ell$$

donde b_j y $b_{j\ell}$ son funciones de las coordenadas generalizadas y del tiempo dadas por

$$b_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \qquad , \qquad b_{j\ell} = \frac{1}{2}\sum_{i1}^{N} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

Invirtiendo esta relación y reemplazando en

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{3N-k} \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}$$

Obtenemos el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ como función de las coordenadas generalizadas, los momentos conjugados y -eventualmente- el tiempo.

19.2 Teoremas de conservación en la formulación Hamiltoniana

A partir de la definición del Hamiltoniano, es inmediato que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Por otro lado, recién demostramos que

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$$

O sea que

- Si el Hamiltoniano no incluye explícitamente al tiempo t, entonces t es *cíclico* (en el sentido de que tampoco aparece explícitamente en el Lagrangiano), y viceversa.

- Si el Hamiltoniano no incluye explícitamente a una coordenada q_j, entonces q_j es *cíclica*, y viceversa.

Vemos que, partir de las ecuaciones,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \qquad , \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j - \dot{p}_j$$

los teoremas de conservación son más inmediatos en la formulación Hamiltoniana donde

- Si el tiempo es una coordenada cíclica, entonces se conserva el Hamiltoniano.
- En ausencia de fuerzas no conservativas, el momento conjugado p_j de una coordenada cíclica se conserva.

19.3 ¿Cómo obtenemos una ley científica?

19.4 ¿Es la Física una ciencia deductiva?