Capítulo 20

Sistemas dinámicos

20.1 Sistemas autónomos

Escribimos las ecuaciones canónicas de Hamilton de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \\
\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} &= \tilde{Q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}
\end{aligned}
$$

que podemos combinar en una única expresión,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

si definimos el *vector de estado*

$$\mathbf{r} = (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

y la *función velocidad*

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n}, \tilde{Q}_1 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1}, \tilde{Q}_2 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2}, \ldots, \tilde{Q}_n - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n}\right)$$

En este sentido, las ecuaciones de Hamilton representan un caso particular de lo que se conoce como *sistema dinámico*. Muchos sistemas, cualquiera sea su naturaleza, pueden caracterizarse por medio de un número finito n de elementos dinámicos característicos, que se pueden representar por una vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de dimensión n y función del tiempo t. Este número n se denomina *orden* del sistema dinámico. El caso particular de las ecuaciones de Hamilton nos advierten que el orden no es necesariamente igual al número de grados de libertad del sistema.

En la práctica, la *velocidad* $\mathbf{v}$ puede contener un cierto conjunto $\mathbf{c}$ de *parámetros de control* que caracterizan al problema. Y estos parámetros pueden ser de distinta naturaleza, como las masas, las constantes de resortes, etc.

Puede sorprender que estemos restringiendo nuestro estudio a sistemas de primer orden en la derivada temporal. Sin embargo, tal restricción es aparente, ya que cualquier sistema con derivadas de orden superior puede ponerse en dicha forma standard por medio de un adecuado cambio de variables. Por ejemplo un sistema como el siguiente

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = G\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$$

puede transformarse en un sistema dinámico definiendo las variables $x_i = \mathrm{d}^{i-1}x/\mathrm{d}t^{i-1}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. De hecho, las ecuaciones canónicas de Hamilton representan una forma de reducción del orden de derivación de las ecuaciones de Newton.

Si la velocidad $\mathbf{v}$ no depende explícitamente del tiempo, decimos que se trata de un *sistema autónomo*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

Es obvio que cualquier sistema dinámico se puede transformar en uno autónomo, aumentando la dimensión en 1, definiendo $x_{n+1} = t$. Esto hace que en a partir de este punto, y sin pérdida de generalidad, nos limitemos a estudiar exclusivamente sistemas autónomos.

20.2 Pierre François Verhulst

20.3 La ecuación logística

En base a los argumentos anteriores, Verhulst mostró en 1846 que las poblaciones obedecían una ecuación de la siguiente forma

$$\dot{x} = kx - \sigma x^2$$

donde k y σ son parámetros de control positivos. Est sistema autónomo de primer orden se suele denominar *ecuación logística*. Con ella, Verhulst predijo que la población de Bélgica tendería a un límite máximo de 9.400.000 habitantes. De hecho, la población en 1994 era de 10.118.000 habitantes, muy próxima al valor predicho por Verhulst. Esta ecuación, en toda su simplicidad, no sólo describe la evolución de una población, sino otros fenómenos diversos, desde la propagación de epidemias, hasta la introducción de una innovación en el mercado de consumo, pasando inclusive por la construcción de catedrales góticas.

Antes de resolver la ecuación logística, buscamos los denominados *puntos fijos* ó *críticos*, esto es aquellos puntos para los cuales $\dot{x} = 0$. Al resolver la ecuación $0 = \dot{x} = -\sigma x(x - k/\sigma)$, obtenemos dos puntos fijos posibles. Uno es $x = 0$ y el otro $x_\infty = k/\sigma$. Si el sistema está en cualquiera de esos puntos, permanece en ellos indefinidamente.

La ecuación logística puede resolverse exactamente,

$$x(t) = \frac{x_\infty x_o}{x_o + (x_\infty - x_o)\exp(-kt)}$$

Es evidente que cuando $x_o \neq 0$, el sistema evoluciona hacia x_∞. Decimos que x_∞ es un punto fijo *asintóticamente estable*. También se lo denomina *atractor*. Por el contrario, el punto fijo $x = 0$ es inestable, en tanto que sólo puede realizarse cuando $x_o = 0$. Cualquier apartamiento de esa exacta condición inicial, hace que el sistema se dirija hacia el atractor. Decimos que $x = 0$ es un *repulsor*.

Con la ecuación logística tuvimos la suerte de conocer la solución exacta y poder determinar el carácter de los puntos críticos por simple inspección de la solución. Pero no siempre ello será posible. En tales casos, podemos considerar un pequeño apartamiento del punto de equilibrio, y analizar su evolución a primer orden de aproximación. Por ejemplo, si reemplazamos $x = x_\infty + \xi$ en la ecuación logística y despreciamos términos de segundo orden en ξ, obtenemos

$$\dot{\xi} = -k\xi$$

Vemos que $\xi \to 0$ para $t \to \infty$, confirmando que x_∞ es un atractor. Para el otro punto crítico, reemplazando $x = 0 + \xi$ y quedándonos a primer orden en ξ, obtenemos

$$\dot{\xi} = k\xi$$

que se aparta de $\xi = 0$ al crecer el tiempo.

Ahora intentaremos generalizar estas ideas a sistemas autónomos de orden mayor.

20.4 Espacio de las fases: órbita, retrato y flujo

Independientemente del sistema físico, biológico, químico, o de cualquier otra naturaleza a que se refiera, es extremadamente útil ver la ecuación $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ del sistema autónomo de orden n como una prescripción acerca de la manera en que el punto $\mathbf{r}$ evoluciona con el tiempo a lo largo de *trayectorias* u *órbitas* en un espacio de dimensión n, que denominamos *espacio de las fases*. El conjunto de todas las trayectorias posibles en dicho espacio, correspondientes a distintos valores iniciales de $\mathbf{r}(t = 0)$, constituyen el *retrato* del sistema. Por analogía con la mecánica de fluidos, la evolución de un sistema dinámico así representado se denomina *flujo*.

dado un punto de la trayectoria, el resto de la misma se puede determinar en base a las ecuaciones que definen el sistema autónomo. Por lo tanto, las trayectorias del espacio de las fases no se pueden cruzar, excepto en los denominados *puntos críticos* donde $\dot{\mathbf{r}} = 0$.

20.5 Sistemas lineales

Consideremos un sistema autónomo de orden n

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

Los puntos críticos $\mathbf{r}_o$ de este sistema son aquellos que verifican

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_o) = 0$$

Con el fin de analizar el comportamiento local y la estabilidad de un dado punto crítico, realizamos una expansión local $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \delta\mathbf{r}$, y reemplazamos en el sistema autónomo quedándonos con términos de primer orden en $\delta\mathbf{r}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta\mathbf{r} = \left.(\delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right|_{\mathbf{r}_o}$$

Si definimos la matriz *jacobiana* $\mathcal{M}$ de la velocidad $\mathbf{v}$ evaluada en $\mathbf{r}_o$ como aquella cuya fila k-ésima es $\nabla v_k|_{\mathbf{r}_o}$, es decir,

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \partial v_1/\partial x_1|_{\mathbf{r}_o} & \partial v_1/\partial x_2|_{\mathbf{r}_o} & \cdots & \partial v_1/\partial x_n|_{\mathbf{r}_o} \\ \partial v_2/\partial x_1|_{\mathbf{r}_o} & \partial v_2/\partial x_2|_{\mathbf{r}_o} & \cdots & \partial v_2/\partial x_n|_{\mathbf{r}_o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial v_n/\partial x_1|_{\mathbf{r}_o} & \partial v_n/\partial x_2|_{\mathbf{r}_o} & \cdots & \partial v_n/\partial x_n|_{\mathbf{r}_o} \end{bmatrix}$$

podemos escribir el sistema lineal como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta\mathbf{r} = \mathcal{M}\,\delta\mathbf{r}$$

Buscamos ahora una solución general de la forma

$$\delta\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} h_i\,\delta\mathbf{r}_i\,\exp(\lambda_i\,t)$$

donde las n constantes h_i están determinadas por la condición inicial $\delta\mathbf{r}(t = 0)$, mientras que los *autovalores* λ_i y los correspondientes *autovectores* $\mathbf{r}_i$, que suponemos normalizados, son las n soluciones no triviales del *problema de autovalores*

$$(\mathcal{M} - \lambda_i\mathcal{I})\;\delta\mathbf{r}_i = 0$$

Para que esta ecuación tenga soluciones distintas de la trivial $\delta\mathbf{r}_i = 0$, la matriz $\mathcal{M} - \lambda_i\mathcal{I}$ no puede ser invertible. Por lo tanto, como una matriz es singular si y sólo si su determinante es nulo, tenemos que encontrar aquellos valores de λ para los cuales su cumple que

$$\det\left(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{I}\right) = 0$$

La función $f(\lambda) = \det(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{I})$ se denomina *polinomio característico* de $\mathcal{M}$. Se trata de un polinomio en λ cuyo grado n es igual a la dimensión de la matriz $\mathcal{M}$. El término de mayor grado es λ^n. El coeficiente de λ^{n-1} es $-$traza($\mathcal{M}$), y el término independiente o constante es $f(0) = (-1)^n \det\mathcal{M}$.

Puesto que el polinomio característico tiene todos sus coeficientes reales, sus raíces no reales deben ser conjugadas de a pares. Es decir que si z es una raíz de $f(\lambda)$, también debe serlo z^*. Tal como veremos en un momento, este simple resultado es de la mayor importancia.

Una vez encontradas las raíces λ_i del polinomio característico, resolvemos las ecuaciones

$$(\mathcal{M} - \lambda_i\mathcal{I})\ \delta\mathbf{r}_i = 0$$

con el fin de encontrar los n vectores $\delta\mathbf{r}_i$. Definimos ahora una matriz $\mathcal{T}$ cuyas columnas sean dichos vectores, de manera tal que la solución general del sistema lineal se puede escribir como

$$\delta\mathbf{r} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} h_1 \exp(\lambda_1 t) \\ h_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \vdots \\ h_n \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix}$$

Ahora bien, si $\mathcal{T}$ posee inversa, el *cambio de coordenadas* $\mathbf{r}' = \mathcal{T} \cdot \mathbf{r}$ define un nuevo conjunto de coordenadas para el problema, la evolución de cada una de las cuales está caracterizada por un único autovalor λ_i

$$\delta\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} h_1 \exp(\lambda_1 t) \\ h_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \vdots \\ h_n \exp(\lambda_n t) \end{pmatrix}$$

Uno de los inconvenientes de esta simplificación se da cuando existe algún par de autovalores complejos, $\lambda_1 = 1/\tau + i\omega$ y $\lambda_2 = \lambda_1^* = 1/\tau - i\omega$. Conjugando la ecuación $(\mathcal{M} - \lambda_1\mathcal{I})\ \delta\mathbf{r}_1 = 0$, obtenemos que $\delta\mathbf{r}_2 = \delta\mathbf{r}_1^*$. Vemos que para mantener la solución general $\delta\mathbf{r}$ real, los coeficientes de los dos términos complejos

$$h_1\ \delta\mathbf{r}_1\ \exp(\lambda_1 t) + h_2\ \delta\mathbf{r}_2\ \exp(\lambda_2 t)$$

también deben ser también conjugados. O sea que

$$h_1\ \delta\mathbf{r}_1\ \exp(\lambda_1 t) + h_2\ \delta\mathbf{r}_2\ \exp(\lambda_2 t) = 2\,\mathrm{Real}\,(h_1\ \delta\mathbf{r}_1\ \exp(\lambda_1 t))$$

Definimos entonces adecuados autovectores y coeficientes reales, de manera tal que

$$h_1\ \delta\mathbf{r}_1\ \exp(\lambda_1 t) + h_2\ \delta\mathbf{r}_2\ \exp(\lambda_2 t) = (h_1'\ \delta\mathbf{r}_1'\ \cos\omega\, t + h_2'\ \delta\mathbf{r}_2'\ \sin\omega\, t)\ \exp(t/\tau)$$

Utilizando estos nuevos autovectores $\delta\mathbf{r}'_i$ en los casos donde algunos de los autovalores sean complejos, aún podemos definir una matriz de transformación $\mathcal{T}$ que reduzca el problema a uno donde cada coordenada evoluciona de una manera simple

$$\delta\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} h_1 \exp(t/\tau)\,\cos\omega t \\ h_2 \exp(t/\tau)\,\sin\omega t \\ \vdots \\ h_{n-1} \exp(\lambda_{n-1}\, t) \\ h_n \exp(\lambda_n\, t) \end{pmatrix}$$

Otra dificultad que puede encontrarse en este proceso de reducción se da cuando dos o más autovalores son iguales. Supongamos, por ejemplo, que $\lambda_1 = \lambda_2$. En tal caso se abren dos posibilidades. Si podemos encontrar dos autovectores distintos, solución de la misma ecuación de autovalores, entonces podemos continuar utilizando toda la maquinaria anterior sin ningún inconveniente. Sin embargo, si *no hay* dos autovalores distintos, la situación no es tan simple.

Consideremos, por ejemplo, el caso de una transformación de segundo orden, con matriz jacobiana $\mathcal{M}$. El polinomio característico es

$$f(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathcal{M})\;\lambda + \det(\mathcal{M})$$

donde $\mathrm{tr}(\mathcal{M})$ es la traza de la matriz. Para que ambos autovalores sean iguales, se debe tener que $\det(\mathcal{M}) = \mathrm{tr}^2(\mathcal{M})/4$. En tal caso, ambos autovalores son iguales a $\lambda = -\mathrm{tr}(\mathcal{M})/2$. La ecuación para la determinación de los autovectores tiene solución sólo si $lambda = 0$. En caso contrario, no es posible encontrar dos autovectores distintos, y lo mejor que se puede lograr es reducir la transformación lineal a la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\;\delta\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\;\delta\mathbf{r}$$

Ahora utilizaremos este resultado para clasificar los puntos críticos.

20.6 Clasificación de los puntos críticos

Si un sistema está en uno de sus puntos críticos, permanece en el. Sin embargo, en todo sistema real, la probabilidad de que las condiciones iniciales sean tales que el sistema se encuentre *precisamente* en dicho punto es despreciable. El comportamiento del sistema depende, entonces, de la *estabilidad* de dicho punto.

Decimos que un punto fijo $\mathbf{r}_o$ es *atractor* de una dada trayectoria $\mathbf{r}(t)$ si

$$\mathbf{r}(t) \to \mathbf{r}_o \;\;\text{para}\; t \to \infty$$

Dicho atractor se dice *fuertemente* o *asintóticamente estable*, si lo es para cualquier trayectoria que pase por alguna vecindad de él.

20.6.1 nodos y puntos hiperbólicos

Claramente, en vistas de lo estudiado en la sección anterior, la existencia de un autovalor real positivo indica que el punto fijo es inestable a lo largo de la dirección representada por el autovector correspondiente. En cambio, el punto es estable si el autovalor es negativo. En ambos casos se dice que estamos en presencia de un *nodo.*

La presencia de al menos un autovalor real positivo nos indica que toda trayectoria para la cual la condición inicial se aparte del punto crítico en la dirección del respectivo autovector, aumentará su separación al transcurrir el tiempo. En ese sentido, el nodo es inestable, a pesar de la posible existencia de otras líneas de estabilidad.

Por ejemplo, si un punto crítico es un estable en una dirección x_1 e inestable en otra dirección x_2, las trayectorias cerca del punto son hipérbolas generalizadas, y el punto se denomina *hiperbólico* o *ensilladura.* En efecto, eliminando el tiempo de las soluciones $x_1 = x_1(0)\exp\lambda_1 t$ y $x_2 = x_2(0)\exp\lambda_2 t$, obtenemos las hipérbolas generalizadas

$$x_1^{|\lambda_1|} \cdot x_2^{|\lambda_2|} = \text{constante}$$

Sólo hay estabilidad a lo largo de la línea $x_2 = 0$. Toda otra trayectoria se separa del punto crítico.

20.6.2 puntos espiral y centros

En el caso de dos autovalores complejos, la estabilidad en el plano representado por los autovectores correspondientes, es estable o inestable dependiendo de que τ sea negativo o positivo, respectivamente. Además, si ω es distinto de cero, se generan trayectorias en espiral alrededor del punto. se dice que el punto es espiral Si τ es nulo, entonces las trayectorias rodean al punto crítico sin acercarse o alejarse. Se denomina punto *elíptico* o *centro.*

20.6.3 línea crítica

S la matriz jacobiana $\mathcal{M}$ es singular, es decir que su determinante es nulo, entonces la ecuación homogénea $\mathcal{M}\ \delta\mathbf{r}_o = 0$ tendría una solución no trivial correspondiente a un autovalor nulo. En este caso, en lugar de un punto crítico aislado, tendríamos una línea crítica que atravesaría el punto a lo largo de la dirección de $\mathbf{r}_o$. Estos casos los discutiremos más adelante