Capítulo 21

Sistemas autónomos de segundo orden

21.1 Vito Volterra y Alfred James Lotka

21.2 Ecuación de Lotka - Volterra

La ecuación logística da, en muchos casos, una visión excesivamente simplificada de la evolución de un sistema biológico. Frecuentemente, una especie es presa de otro, de manera que ambas poblaciones están relacionadas en una estructura presa-depredador, que corresponde a un sistema autónomo de segundo orden.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= ax - bxy \\
\dot{y} &= -cy + dxy
\end{aligned}
$$

donde a, b, c, d son parámetros de control positivos. x e y representan las poblaciones de presa y depredador, respectivamente. El término proporcional a xy modeliza el efecto de la interacción entre ambas especies, ventajoso para el depredador y desventajoso para la presa. Si no existieran tal interacción, las presas proliferarían exponencialmente, mientras que los depredadores se extinguirían. En estos términos, los parámetros a y b representan las tasas de crecimiento y decaimiento, mientras que c y d caracterizan la competencia entre especies.

Esta es la ecuación de Lotka - Volterra. Es un caso particular de un sistema autónomo de segundo orden. A diferencia de los sistemas de primer orden, este sí puede representar un sistema mecánico, aunque del tipo más simple, es decir con un único grado de libertad. La ecuación de Newton para un sistema tal, $m\ddot{x} = f(x)$, puede escribirse como un sistema autónomo de segundo orden si introducimos la variable adicional $y = \dot{x}$. Tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= f(x)/m
\end{aligned}
$$

De hecho, si definimos el Hamiltoniano $H(p,q) = -cp + de^p - aq + be^q$, obtenemos las siguientes ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -c + de^p \\ \dot{p} &= a - be^q \end{aligned}$$

Y si definimos las variables $x = e^p$ e $y = e^q$, el sistema anterior se transforma en las ecuaciones de Lotka - Volterra,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

al menos en el primer cuadrante $x > 0, y > 0$. Esto nos indica, además, que el Hamiltoniano

$$H(x,y) = -c\ln x + dx - a\ln y + by$$

es una cantidad conservada en dicho sistema autónomo. En otras palabras, es una *energía*, aunque no *la* energía mecánica.

Estas características justifican que nos detengamos a realizar un estudio detallado de este tipo de sistemas autónomos, no sólo debido a su isomorfismo con los sistemas mecánicos de un único grado de libertad, sino también porque nos permitirán en forma simple ejemplificar las ideas planteadas en las secciones anteriores así como dar pautas generales para la resolución de sistemas de orden superior.

Además debe destacarse la generalidad de este estudio de los sistemas autónomos que estamos encarando, en tanto que no sólo están restringidos a sistemas mecánicos, sino también a una gran variedad de aplicaciones, como la ecuación de Lotka-Volterra claramente muestra. Esto nos permitirá, eventualmente, expandir las técnicas e ideas de la Mecánica a los sistemas más diversos.

Las ecuaciones de Lotka - Volterra.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{aligned}$$

tienen dos puntos críticos $\mathbf{r}_o = (x_o, y_o)$, solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= ax - bxy = -b\,x(y - a/b) \\ 0 &= -cy + dxy = d\,y(x - c/d) \end{aligned}$$

Estos son $(0,0)$ y $(c/d, a/b)$.

La matriz jacobiana correspondiente es

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a - b\,y_o & -b\,x_o \\ d\,y_o & d\,x_o - c \end{bmatrix}$$

En particular,

- para $(0,0)$ tenemos $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$
- para $(c/d, a/b)$, $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{bmatrix}$

La ecuación de autovalores

$$\det\left(\mathcal{M} - \lambda\mathcal{I}\right) = 0$$

da como resultado

- para $(0,0)$ tenemos $(\lambda - a)(\lambda + c) = 0$ con autovalores $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = -c$
- para $(c/d, a/b)$ tenemos $\lambda^2 + ac = 0$ con autovalores $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$

Concluimos que el origen es un nodo, inestable en la dirección x, mientras que $(c/d, a/b)$ es un centro o punto elíptico. La existencia de este centro tiene importantes consecuencias en ecología, ya que muestra la existencia de variaciones cíclicas en las poblaciones y que, además, pueden no estar en fase.

Eliminando el tiempo de las ecuaciones de Lotka - Volterra obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}\frac{c - dx}{a - by}$$

que, siendo separable,

$$\frac{a - by}{y}\mathrm{d}y = -\frac{c - dx}{x}\mathrm{d}x$$

puede integrarse, obteniendo,

$$-c\ln|x| + dx - a\ln|y| + by = \text{constante}$$

que es justamente la *energía* encontrada anteriormente.

21.3 Resolución general de los sistemas autónomos de segundo orden

Puesto que el polinomio característico de un sistema autónomo de segundo orden arbitrario esta dado por

$$f(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathcal{M})\,\lambda + \det(\mathcal{M})$$

donde $\mathcal{M}$ es la matriz jacobiana, los posibles autovalores son

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\mathcal{M}) \pm \sqrt{\Delta}\right)$$

donde el discriminante es

$$\Delta = \mathrm{tr}^2(\mathcal{M}) - 4\det(\mathcal{M})$$

Vemos que el punto crítico queda caracterizado por la traza y el discriminante de la matriz jacobiana, según se muestra en las siguientes figuras y tablas

	$\mathrm{tr} > 0$	$\mathrm{tr} = 0$	$\mathrm{tr} < 0$
$\Delta > 0$	nodo inestable	ensilladura	nodo estable
$\Delta = 0$	nodo inestable	...	nodo estable
$\Delta < 0$	espiral inestable	centro	espiral estable

Además, a lo largo de la línea $\det(\mathcal{M}) = 0$ el punto crítico no está aislado.

Esta descripción general es muy importante cuando se describen sistemas más complicados que los estudiados hasta ahora. Por ejemplo el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1 x - \alpha_1 xy - \sigma_1 x^2 \\ \dot{y} &= k_2 y - \alpha_2 xy - \sigma_2 y^2\end{aligned}$$

describe el comportamiento logístico de dos especies en competencia con similares interacciones destructivas. Este no es un sistema Hamiltoniano[1]. Sin embargo, su retrato es accesible a través de un análisis local de los puntos críticos (cuatro en este caso particular).

21.4 Ciclos límites

Consideremos el siguiente sistema autónomo

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{x}{\tau}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right) - \omega y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{y}{\tau}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right) + \omega y\end{aligned}$$

El único punto crítico de este sistema está en el origen y es siempre una espiral, con autovalores $\lambda_\pm = 1/\tau \pm i\omega$, inestable si $\tau > 0$ y estable si $\tau < 0$.

Sin embargo, hay mucho más en este sistema autónomo que ese punto crítico. En efecto, si hacemos lo transformamos a coordenadas polares $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{r}{\tau}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \omega\end{aligned}$$

[1] Más adelante en este curso discutiremos con más detalle las características distintivas de los sistemas dinámicos hamiltonianos

Vemos que el círculo $x^2 + y^2 = R^2$ representa una situación de equilibrio, ya que si el sistema está inicialmente allí, permanece allí indefinidamente. A este tipo de líneas se las denomina *ciclo límite*. Además, es fuertemente estable si $\tau < 0$ e inestable en caso contrario.

21.4.1 Ecuación de Rayleigh

Una ecuación con las característica anteriores fue estudiada por John William Strutt, tercer barón de Rayleigh

...

Lord Rayleigh planteó la siguiente ecuación

$$\ddot{x} - \epsilon \dot{x}(1 - \dot{x}^2) + x = 0$$

como parte de sus estudios por encontrar un flujo intrínsecamente inestable, como un modelo de un sistema oscilante auto excitado. Si el parámetro de control ϵ se asume positivo, entonces el amortiguamiento es positivo o negativo dependiendo de que $|\dot{x} > 1$ o $|\dot{x} < 1$, respectivamente. Un modelo de tal sistema sería el de un cuerpo sobre el que actúa un resorte y la fuerza de rozamiento de una banda que se mueve uniformemente. Podemos escribir esta ecuación como un sistema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \epsilon y(1 - y^2) - x \end{aligned}$$

Este sistema presenta las mismas características que el estudiado recientemente: Una espiral inestable en el centro, rodeado por un ciclo límite, cuya forma depende fuertemente del parámetro ϵ. Al aumentar ϵ la variación de x con t pasa de ser esencialmente sinusoidal, a tener una oscilación fuertemente asimétrica, con abruptos saltos y caídas. Este efecto se denomina *oscilaciones de relajación*.

21.4.2 El puente Tacoma Narrows

21.5 Bifurcaciones de Hopf

Evidentemente, el retrato de un sistema autónomo particular puede variar mucho al modificar los parámetros de control **c**. En muchos casos, es de particular interés estudiar las transiciones, abruptas o no, que pueden ocurrir para ciertos valores particulares de **c**. La importancia de este análisis radica en lo que denominamos *estabilidad estructural* de un sistema. Los cambios abruptos se denominan *bifurcación* o *catástrofe*.

El matemático alemán Heinz Hopf (Gräbschen, 1894 - Zollikon, 1971; Alemania) mostró un importante mecanismo de bifurcación por el cual la naturaleza de un retrato puede cambiar drásticamente al variar un parámetro de control. Consideremos nuevamente el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{x}{\tau}\left(1-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)-\omega y\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{y}{\tau}\left(1-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)+\omega y\end{aligned}$$

La solución exacta de este problema en coordenadas polares es

$$\begin{aligned}r^2 &= \frac{R^2}{1-(1-R^2/r_o^2)\,\exp(-2t/\tau)}\\ \theta &= \omega t\end{aligned}$$

donde $r_o = r(t=0)$. Si restringimos los parámetros R y τ a variar al unísono según las siguientes leyes

$$\begin{gathered}R^2 = \chi R_o^2\\ \tau = \tau_o/\chi\end{gathered}$$

donde tanto R_o como τ_o son constantes reales positivas, la trayectoria es

$$r^2 = \frac{\chi\, R_o^2}{1-(1-\chi R_o^2/r_o^2)\,\exp(-2\chi t/\tau_o)}$$

Si $\chi < 0$, el origen es el único punto crítico y es absolutamente estable. Por el contrario, si $\chi > 0$, ese punto se vuelve inestable y aparece un ciclo límite de radio $R = \sqrt{\chi}\, R_o$. Vemos como al cambiar el nodo de estable a inestable da a luz a un ciclo límite. Esta bifurcación de Hopf se denomina *supercrítica* o *subcrítica* según que el ciclo límite resultante sea un atractor o un repulsor. El anterior es un caso típico de bifurcación supercrítica. Si, en cambio, reemplazamos $R^2 = -\chi\, R^2$ y $\tau = \tau_o/\chi$, la trayectoria

$$r^2 = \frac{\chi\, R_o^2}{(1+\chi R_o^2/r_o^2)\,\exp(-2\chi t/\tau_o)-1}$$

define un caso de bifurcación subcrítica. Cuando χ pasa de ser negativo a positivo, el foco inestable se vuelve estable, apareciendo un ciclo límite inestable.

El efecto de una bifurcación de Hopf supercrítica es relativamente benigna. En el caso subcrítico, en cambio, y a pesar de la estabilidad del punto crítico, una pequeña perturbación puede expulsar al sistema fuera del ciclo límite.

...