

# Capítulo 22

## Oscilaciones pequeñas

### 22.1 Una introducción matemática: Operadores simétricos

Antes de comenzar este capítulo, demostraremos dos importantes propiedades de las matrices reales simétricas:

1. Todos sus autovalores son reales.
2. Existe una base ortonormal de autovectores del operador.

Consideremos una matriz  $\mathcal{A}$  simétrica y de elementos reales. Es fácil demostrar que todos sus autovalores  $\lambda$  son también reales. En efecto, si  $\mathbf{c}$  es el autovector correspondiente, entonces

$$\lambda|\mathbf{c}|^2 = \frac{(\mathbf{c}^*)^t \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{c}|^2} = \frac{(\mathbf{c}^*)^t \cdot (\mathcal{A}^*)^t \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{c}|^2} = \frac{((\mathbf{c}^*)^t \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{c})^*}{|\mathbf{c}|^2} = \frac{(\lambda|\mathbf{c}|^2)^*}{|\mathbf{c}|^2} = \lambda^*$$

donde con  $*$  hemos indicado la operación de conjugar, y con  $t$ , la de trasponer. Además, siendo  $\mathbf{c}$  solución de una ecuación lineal real, debe también ser real<sup>1</sup>. Esto nos permite trabajar en un espacio vectorial real  $\mathcal{R}^n$  con un producto escalar  $\mathbf{c}_1^t \cdot \mathbf{c}_2$ .

Para demostrar la segunda propiedad, es decir que existe una base ortonormal de autovectores de  $\mathcal{A}$ , comenzamos por advertir que, por lo anterior,  $\mathcal{A}$  tiene  $n$  autovalores *reales*, aunque algunos de ellos puedan ser degenerados. Sean ahora  $\mathbf{c}_1$  y  $\mathbf{c}_2$  los autovectores correspondientes a dos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , que suponemos distintos. Entonces

$$\mathbf{c}_1^t \cdot \mathbf{c}_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{c}_1^t \cdot \mathbf{c}_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(\mathcal{A} \cdot \mathbf{c}_1)^t \cdot \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1^t \cdot (\mathcal{A} \cdot \mathbf{c}_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\mathbf{c}_1^t \cdot (\mathcal{A}^t - \mathcal{A}) \cdot \mathbf{c}_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0$$

---

<sup>1</sup>a menos de una fase multiplicativa.

con lo cual, los autovalores asociados a autovalores distintos son *ortogonales* entre sí. Ahora bien, encontrado un autovector<sup>2</sup>  $\mathbf{c}_1$ , vemos que su *complemento ortogonal* (Es decir el conjunto de todos los vectores  $\mathbf{c}_2$  perpendiculares a  $\mathbf{c}_1$ ) es *estable* o *invariante*, en el sentido de que si aplico  $\mathcal{A}$  a cualquier de sus vectores, obtengo otro vector de ese mismo subespacio. En efecto, si  $\mathbf{c}_2$  es ortogonal a  $\mathbf{c}_1$ ,

$$\mathbf{c}_1^t \cdot (\mathcal{A} \cdot \mathbf{c}_2) = \mathbf{c}_1^t \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1^t \cdot \mathcal{A}^t \cdot \mathbf{c}_2 = (\mathcal{A} \cdot \mathbf{c}_1)^t \cdot \mathbf{c}_2 = \lambda^* \mathbf{c}_1^t \cdot \mathbf{c}_2 = 0$$

con lo cual  $\mathcal{A} \cdot \mathbf{c}_2$  también es ortogonal a  $\mathbf{c}_1$ . Y como la dimensión de este complemento ortogonal es  $n - 1$ , podemos aplicar el método inductivo sobre la dimensión del espacio para concluir que existe una base ortogonal de autovectores. Además, sin pérdida de generalidad supondremos que  $\mathbf{c}_j$  está normalizado, es decir que  $|\mathbf{c}_j|^2 = 1$ .

Con este resultado, la matriz  $\mathcal{C}$  cuyas columnas son los autovectores ortonormalizados  $\mathbf{c}_j$  es una matriz *ortogonal* (y por lo tanto inversible), en el sentido de que

$$\mathcal{C}^t \cdot \mathcal{C} = \mathcal{I}$$

Y con ello,

$$\mathcal{C}^t \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}^t \cdot (\mathcal{A} \cdot \mathcal{C}) = \mathcal{C}^t \cdot (\mathcal{C} \cdot \Lambda) = \mathcal{C}^t \cdot \mathcal{C} \cdot \Lambda = \Lambda$$

donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores  $\lambda$  de la matriz  $\mathcal{A}$ .

## 22.2 Desarrollo alrededor de un punto crítico estable

Consideremos un sistema mecánico sometido a condiciones de vínculo holónomas y esclerónomas (es decir, independientes del tiempo). En tal caso el Lagrangiano se puede escribir como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

donde la energía cinética es una forma cuadrática en las velocidades generalizadas

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{i,j}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Además es *definida positiva*, ya que la energía cinética no puede ser cero al menos que todas las velocidades sean cero. Sin pérdida de generalidad suponemos que  $a_{i,j} = a_{j,i}$ .

---

<sup>2</sup>... y sabemos que existe al menos uno, solución de la ecuación  $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) \cdot \mathbf{c} = 0$  para algún autovalor  $\lambda$ .

Buscamos los puntos críticos del problema, que anotamos  $q_o$ . Si el sistema se encuentra en uno de estos puntos con velocidades  $\dot{q}$  nulas, continuará en él indefinidamente. Para ello es necesario y suficiente que

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_o} = 0$$

Es decir que la *fuerza generalizada* se debe anular en el punto crítico.

Desarrollando la energía potencial alrededor de un punto crítico obtenemos

$$V = V(q_o) + \sum_i \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_o} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_o} x_i x_j + \dots$$

donde hemos definido  $x_i = q_i - q_o$ . Eliminando la constante, el primer término no nulo está dado por una forma cuadrática “simétrica”

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{x}$$

donde  $\mathcal{K}$  es la matriz *hessiana*<sup>3</sup> de elementos

$$k_{i,j} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_o}$$

Para que el punto crítico  $q_o$  sea absolutamente estable, es necesario y suficiente que defina un mínimo absoluto de la energía potencial; es decir que la forma cuadrática sea definida positiva.

Debido a la conservación de la energía, las partes potencial y cinética deben ser de mismo orden de magnitud, siendo  $T$  máxima cuando  $V = 0$  y viceversa. Por lo tanto, para pequeños apartamientos respecto del punto crítico, las velocidades  $\dot{x}_i$  y las posiciones  $x_i$  también serán del mismo orden. Por lo anterior, un desarrollo de segundo orden implica que debemos aproximar los coeficientes  $a_{i,j}(q)$  por su valor en el punto crítico  $a_{i,j}(q_o)$ , resultando la forma cuadrática “simétrica”

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^t \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

donde  $\mathcal{M}$  es la matriz de elementos  $m_{i,j} = a_{i,j}(q_o)$ .

Aplicando las ecuaciones de Lagrange, resulta

$$\mathcal{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathcal{K} \cdot \mathbf{x} = 0$$

---

<sup>3</sup>Esta matriz fue introducida por Otto Hesse en un artículo de 1842 referido a curvas cúbicas y cuadráticas. Hesse nació en Königsberg, Alemania (actualmente en Rusia) el 22 de Abril de 1811. Estudió con Jacobi en su ciudad natal, donde se desempeñó, primero como mastro de física y química y posteriormente como profesor. En 1856 se trasladó a Heidelberg donde permaneció doce años, antes de tomar un puesto en Munich, donde falleció el 4 de Agosto de 1874.

La similitud con la ecuación correspondiente a un oscilador armónico unidimensional nos lleva a ensayar una solución particular de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} \exp(i\omega t)$$

$\mathbf{c}$  es un vector de elementos complejos y se sobrentiende “tomar la parte real”. Reemplazando en la ecuación de movimiento, obtenemos

$$(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M}) \cdot \mathbf{c} = 0$$

Para que este sistema de ecuaciones posea una solución no trivial, la matriz  $\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M}$  debe ser singular, o sea que se debe satisfacer la ecuación de autovalores

$$\det(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M}) = 0$$

Esta ecuación representa un polinomio real en  $\omega^2$  de grado  $n$  igual al número de grados de libertad del sistema. Cada una de las  $n$  soluciones  $\omega_j$  tiene asociado un autovector  $\mathbf{c}_j$  que, por lo discutido en la sección anterior, supondremos real y normalizado.

La solución general del sistema es la combinación lineal de las  $n$  soluciones particulares

$$\mathbf{x} = \text{Real} \left( \sum_j h_j \mathbf{c}_j \exp(i\omega_j t) \right)$$

Definimos la matriz  $\mathcal{C}$  cuyas columnas son los autovectores normalizados  $\mathbf{c}_j$ . Por lo estudiado en el capítulo anterior, sabemos que esta matriz es ortogonal. El cambio de base  $\mathcal{C}^t \cdot \mathbf{x}$  define un nuevo conjunto de coordenadas, cada una de las cuales evoluciona en el tiempo con una sola frecuencia  $\omega_j$ . Estas coordenadas se denominan *normales*. La evolución del sistema cuando *una sola* de las coordenadas normales se separa de la posición de equilibrio se llama *modo normal de oscilación*.

### 22.3 El oscilador armónico simple

Comencemos estudiando el caso más simple, correspondiente a un sistema con un único grado de libertad. la ecuación de Lagrange alrededor del punto crítico es

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

nos conduce con una ecuación secular con  $k - \omega_o^2 m = 0$  con un único autovalor  $\omega_o^2 = k/m$  y un único autovector normalizado  $\mathbf{c} = 1$ . La solución general es

$$x = \text{Real}(h \exp(i\omega_o t)) = A \cos(\omega_o t + \delta)$$

donde hemos definido las cantidades reales amplitud  $A$  y desfasaje  $\delta$  tales que  $\ln h = \ln A + i\delta$ . Adviértase que no hay indeterminación en el signo de  $\omega_o$ , ya que

reemplazar  $\omega_o$  por  $-\omega_o$  equivale a cambiar el signo de la constante arbitraria  $\delta$ . La amplitud  $A$  está fijada por la energía total de sistema  $E = T + V = kA^2/2$

Considerando al oscilador armónico como sistema autónomo, con variables  $x$  e  $y = \dot{x}$ , tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_o^2 x\end{aligned}$$

cuyo único punto crítico  $(0,0)$  es un centro. Ya sea eliminando el tiempo en la solución

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega_o t + \delta) \\ y &= -A\omega_o \sin(\omega_o t + \delta)\end{aligned}$$

utilizando la ley de conservación de energía ( $E = T + V = kA^2/2$ ) o resolviendo la ecuación diferencial de primer orden que resulta de eliminar el tiempo en el sistema autónomo ( $dy/dx = -\omega_o^2 x/y$ ) hallamos que las órbitas son *elipses* dadas por

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{\omega_o^2 A^2} = 1$$

con lo cual, a cada energía  $E = kA^2/2$  le corresponde una trayectoria distinta. Adviértase cómo ninguna trayectoria se cruza, en tanto que las soluciones del sistema son únicas. Vemos además que en un sistema de coordenadas cartesianas, cada punto representativo evoluciona en el sentido contrario a las agujas del reloj.

### 22.3.1 Oscilaciones amortiguadas

El caso anterior, donde una vez iniciado el movimiento nunca cesa, es una simplificación de las situaciones reales donde siempre hay algún tipo de fuerza disipativa. Por ejemplo, si incluimos una fricción lineal con la velocidad, es decir

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

o, como sistema autónomo,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_o^2 x - 2\beta y\end{aligned}$$

todavía podemos encontrar una solución analítica general

$$x = e^{-\beta t} (h_1 e^{i\omega t} + h_2 e^{-i\omega t})$$

donde  $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$ .

Si  $\omega_o^2 > \beta^2$ , la solución

$$x = A \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \delta)$$

describe un movimiento periódico que se va amortiguando con el tiempo. Este tipo de movimiento se denomina *subamortiguado*. La energía no se conserva, sino que disminuye constantemente, aunque no de manera uniforme, y la trayectoria *cae* en espiral hacia el punto crítico  $(0, 0)$  que, por lo tanto, constituye un nodo espiral estable.

Si  $\omega_o^2 = \beta^2$ , tomando el límite  $\omega \rightarrow 0$  en la solución anterior, obtenemos

$$x = A e^{-\beta t} [\cos(\delta) - \sin(\delta) \omega t]$$

La amortiguación es apenas lo suficientemente fuerte como para evitar que el sistema realice ningún movimiento oscilatorio. Se trata de una situación de *amortiguamiento crítico*

Si  $\omega_o^2 < \beta^2$ , se dice que el régimen es *sobreamortiguado*. El sistema tiende al punto crítico  $(0, 0)$  sin oscilar (nodo estable), siendo

$$x = e^{-\beta t} (A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$$

con  $\omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}$ .

### 22.3.2 Oscilaciones forzadas

El caso más simple de un oscilador forzado, es aquel donde la fuerza varía en forma armónica,  $F = F_o \cos \omega t$ . Escribimos

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \omega_e t$$

La solución general es la suma una particular y de la solución homogénea, estudiada hace un momento, y que en este contexto se denomina *término transitorio*, pues disminuye exponencialmente con una rapidez determinada por  $\beta$ , quedando finalmente sólo la solución particular, llamada *término permanente*.

Nosotros sólo estudiaremos la situación *estabilizada* representada por este último término. Suponemos una solución del tipo

$$x = A \sin(\omega_e t + \delta)$$

y reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega_o^2)^2 + 4\beta^2\omega_e^2}}$$

$$\delta = \arctan \frac{2\beta\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_o^2}$$

Si  $\omega_e \ll \omega_o^2$ , vemos que  $A \approx F_o/m\omega_o^2 = F_o/k$  y  $\delta = 0$ . Vemos que la solución permanente no depende de  $m$ . Se dice que el oscilador está gobernado por la *rigidez*.

Si, por el contrario,  $\omega_e \gg \omega_o^2$ , Obtenemos  $A \approx F_o/m\omega_e^2$  y  $\delta = \pi$ . La oscilación no depende de  $k$  y por lo tanto se dice que es de *control masivo*.

Entre estos dos extremos, hay un valor de la frecuencia de la fuerza externa que maximiza la amplitud  $A$ .

$$\omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

Esta condición se llama *resonancia* y la frecuencia correspondiente *resonante*. Usualmente las resonancias se caracterizan también por el denominado *factor de calidad*  $Q = \omega_R/2\beta$ . Cuando mayor es  $Q$ , mayor es también la amplitud  $A$  en la resonancia.

### 22.3.3 El péndulo

El ejemplo más conocido de un oscilador armónico es el *péndulo*, es decir una masa  $m$  obligada a moverse en un plano vertical sobre un círculo de radio  $r$ . La energía cinética es  $T = mr^2\dot{\theta}^2/2$  y la energía potencial gravitatoria  $V = -mgr \cos \theta$ , donde el ángulo theta está medido desde la posición de equilibrio  $\theta = 0$ . La energía cinética ya tiene una forma cuadrática con  $\mathcal{M} = mr^2$ , mientras que el hessiano del potencial es  $\mathcal{K} = \partial^2 V / \partial \theta^2 |_{\theta=0} = mgr$ , con ello, la frecuencia característica es  $\omega_o = \sqrt{mgr/mr^2} = \sqrt{g/r}$ . Sin embargo, hay que recordar que la ecuación de movimiento  $\ddot{\theta} + \omega_o^2 \sin \theta = 0$  sólo es armónico ( $\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0$ ) cerca del punto crítico y en forma aproximada. A medida que la amplitud  $\theta_o$  crece, la frecuencia comienza a apartarse de  $\omega_o$ , resultando,

$$\omega = \omega_o \left( 1 - \left( \frac{\theta_o}{16} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{\theta_o}{16} \right)^4 + \dots \right)$$

El primero en estudiar los casos de oscilaciones no pequeñas fue Leonhard Euler en 1736, confirmando lo descubierto por Galileo en 1581, que aunque el péndulo no es *isócrono*, lo es con excelente aproximación para amplitudes pequeñas.

El sistema autónomo correspondiente al péndulo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_o^2 \sin x \end{aligned}$$

tiene una multitud de puntos de equilibrio ubicados en  $(n\pi, 0)$ , estables para  $n$  par e inestables para  $n$  impar. Puesto que el potencial es periódico en  $\theta$ , también lo es el retrato. De hecho, todos los puntos estables son el mismo punto, y lo mismo ocurre con los inestables. El punto estable es un centro, y actúa como atractor

en presencia de amortiguamiento. Cuando la energía es mayor que  $E_o = 2mgr$ , el movimiento ya no es oscilatorio, aunque si es periódico. Si  $E = E_o$ , entonces el péndulo tenderá hacia el punto crítico inestable  $\theta = \pi$ , pero sin alcanzarlo. Las trayectorias que, como ésta, separa el movimiento acotadas de las no acotadas reciben el nombre de *separatriz*.

## 22.4 Ejemplos

Muchos sistemas, físicos o no, pueden mostrar oscilaciones simples como las descritas en esta sección. El péndulo y la pesa sostenida por un resorte son los casos más conocidos. Pero la misma formulación matemática se aplica también a otros sistemas mecánicos como el péndulo de torsión, la cuerda vibrante o las vibraciones elásticas de una membrana ó una barra. En los sistemas acústicos, la emisión de ondas de sonido puede actuar como un mecanismo de amortiguamiento. Los circuitos eléctricos constituyen ejemplos no mecánicos de sistemas oscilantes, con las siguiente analogías:

$x$	desplazamiento	$\Rightarrow$	$q$	carga
$\dot{x}$	velocidad	$\Rightarrow$	$I$	corriente
$m$	masa	$\Rightarrow$	$L$	inductancia
$\beta$	rozamiento	$\Rightarrow$	$R$	resistencia
$r$	constante de restitución	$\Rightarrow$	$1/C$	capacitancia <sup>-1</sup>
$F_o$	amplitud de la fuerza	$\Rightarrow$	$\mathcal{E}$	amplitud de la fuerza electromagnética

Los sistemas atómicos también pueden representarse como osciladores lineales. Cuando la luz es absorbida por la materia, pone a las moléculas en un estado de oscilación. En general, una molécula con  $n$  átomos tiene  $3n$  grados de libertad. Tres de estos se necesitan para describir el movimiento de traslación, y otros tres para describir la rotación. Quedan entonces  $3n - 6$  grados de libertad para describir la vibración molecular. Si la molécula es colineal, sólo hay dos grados de libertad rotacionales, y entonces se tienen  $3n - 5$  grados de libertad para la oscilación. Esta molécula puede oscilar de manera longitudinal a lo largo de su propia línea de átomos. En esta dirección hay tantos grados de libertad como átomos, pero uno de ellos corresponde a traslación, con lo cual quedan  $n - 1$  grados de libertad longitudinales. De los  $(3n - 5) - (n - 1) = 2n - 4$  modos de oscilación transversales, cada uno tiene otro semejante perpendicular, por lo cual en realidad se tiene la mitad de ellos,  $n - 2$ .

Consideremos, por ejemplo, la molécula de dióxido de carbono  $\text{CO}_2$ . Esta es una molécula lineal donde los átomos de oxígeno se ubican a ambos lados del Carbono. Tenemos 2 modos de oscilación longitudinales y 1 transversal, tal como

se indica

frecuencia	modo	movimiento
$\frac{\sqrt{(2m + M)k_1/mM}}{\sqrt{k_1/m}}$	longitudinal	$x_1 = x_3 = -Mx_2/2m$
$\frac{\sqrt{k_1/m}}{\sqrt{2(M + 2m)k_2/mM}}$	longitudinal	$x_1 = -x_3, x_2 = 0$
	transversal	$y_1 = y_3 = -My_2/2m$

donde  $m$  es la masa del oxígeno,  $M$  es la masa del Carbono, y  $k_1$  y  $k_2$  las constantes de restitución de la ligadura  $C - O$  en las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente.

## 22.5 El resorte cargado

Consideremos un resorte o hilo elástico sostenido por ambos extremos y estirado con una tensión  $\mathcal{F}$ , con pesas idénticas de masa  $m$  a intervalos regulares de longitud  $\ell$ . Cuando las partículas se desplazan distancias  $y_j$  en la dirección transversal, el trozo de resorte entre las partículas  $j$  y  $j + 1$  se deforma en una longitud  $\delta\ell = |\sqrt{\ell^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} - \ell| \approx (y_{j+1} - y_j)^2/2\ell$ . El trabajo realizado es  $\mathcal{F} \cdot \delta\ell$  y, por lo tanto, la energía potencial es

$$V = \frac{\mathcal{F}}{2\ell} \sum_{j=0}^{n+1} (y_{j+1} - y_j)^2$$

donde incluimos las condiciones de ligadura en los extremos suponiendo que  $y_0 = y_{n+1} = 0$ . La energía cinética es

$$T = \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \dot{y}_j^2$$

Obtenemos así  $\mathcal{M} = m\mathcal{I}$  para la matriz de la energía cinética, y

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{F}}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

para el hessiano de la energía potencial. Para  $n = 1$ , el polinomio secular  $2\mathcal{F}/\ell - \omega^2 m = 0$  tiene la solución única  $\omega = \sqrt{2\mathcal{F}/\ell m}$ . Para  $n = 2$  obtenemos  $\omega = \sqrt{(2 \pm 1)\mathcal{F}/\ell m}$ . Para valores mayores de  $n$ , la solución se vuelve cada vez más difícil de obtener por este método directo, sin embargo, todavía es posible obtenerla en forma algebraica,

$$\omega_s = 2 \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{m\ell}} \sin\left(\frac{s \pi/2}{n+1}\right)$$

donde  $s = 1, 2, \dots, n$ , con autovectores  $\mathbf{c}_s$  de elementos  $\sin(j s \pi / (n + 1))$ . La solución general es

$$y_j(t) = \sum_{s=1}^n h_s \sin\left(j \frac{s \pi}{n+1}\right) \exp(i\omega_s t)$$

y las coordenadas normales son

$$\eta_s = \sum_{j=1}^n \sin\left(j \frac{s \pi}{n+1}\right) y_j$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \eta_s &= \sum_{j=1}^n \sin\left(j \frac{s \pi}{n+1}\right) y_j \\ &= \sum_{j,s} \sin\left(j \frac{s \pi}{n+1}\right) h_s \sin\left(j \frac{s \pi}{n+1}\right) \exp(i\omega_s t) \\ &= \sum_s \left[ \sum_j \sin\left(j \frac{s \pi}{n+1}\right) \sin\left(j \frac{s \pi}{n+1}\right) \right] h_s \exp(i\omega_s t) \\ &= \sum_s \left[ \frac{n+1}{2} \delta_{j,s} \right] h_s \exp(i\omega_s t) \\ &= \frac{n+1}{2} h_j \exp(i\omega_j t) \end{aligned}$$