Capítulo 23

Sistemas continuos

23.1 Introducción

Hasta ahora hemos estado considerando sistemas mecánicos con un número finito de grados de libertad. Ahora querríamos considerar el caso de aquellos sistemas que poseen un continuo de grados de libertad. Es decir, un sistema separable en infinitas partes *infinitesimales* que pueden moverse unas respecto a las otras. La materia en distintos estados de agregación, ya sea que se trate de gases, líquidos o sólidos, caen dentro de esta categoría.

El estudio de tales sistemas es muy complejo, y merece un curso aparte. Sin embargo, aquí intentaremos destacar algunos de los aspectos básicos de su cinemática, en particular su capacidad para transportar *ondas*

El ejemplo más simple de un sistema con tales características está dado por una cuerda elástica en tensión y amarrada por ambos extremos. Su desplazamiento transversal no está caracterizado por un dado número de variables, sino por una función continua $y(x)$ que representa al desplazamiento de cada trozo. Al *pulsar* la cuerda, esta comienza a desplazarse transversalmente según una ley $y(x,t)$. Comenzaremos estudiando este caso particular, como límite de la cuerda pesada analizada al final del capítulo anterior.

23.2 La cuerda elástica

Consideremos ahora una cuerda elástica. Teniendo en cuenta que en las soluciones anteriores $L = (n+1)\ell$ es la longitud total de la cuerda, podemos extraer las frecuencias para el caso continuo como

$$\begin{aligned}\omega_s &= 2\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{m\ell}}\,\sin\left(\frac{s\,\pi/2}{n+1}\right) \approx 2\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{m\ell}}\,\left(\frac{s\,\pi/2}{n+1}\right) = \frac{c}{\ell}\,\frac{\pi\,s}{n+1} \\ &= \frac{\pi\,c\,s}{L}\end{aligned}$$

donde hemos definido la masa por unidad de longitud $\mu = m/\ell$ y la *velocidad característica* $c = \mathcal{F}/\mu$.

Podemos aprovechar la solución general anterior, reemplazando $s/(n+1) = x/L$,

$$y(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} h_s \sin\left(\frac{s\,x\,\pi}{L}\right) \exp\left(\frac{i\,s\,\pi c\,t}{L}\right)$$

que es, ni más ni menos, que una serie de Fourier, para la perturbación transversal, que incluye todos los múltiplos de la *frecuencia fundamental* $\omega_o = \pi c/L$. Vemos que esta velocidad solo depende de la masa total M de la cuerda y de la tensión $\mathcal{F}$ a la que está sometida. En efecto, $c = \pi\mathcal{F}/\mu L = \pi\mathcal{F}/M$.

La parte real de la solución puede escribirse como

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{s=1}^{\infty} |h_s| \sin\left(\frac{s\,x\,\omega_o}{c}\right) \cos\left(s\,\omega_o\,t + \delta_s\right) \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|h_s|}{2} \left(\sin\left(\frac{2\pi s}{\lambda_o}(x + c\,t) + \delta_s\right) + \sin\left(\frac{2\pi s}{\lambda_o}(x - c\,t) - \delta_s\right)\right) \end{aligned}$$

donde hemos definido la *longitud de onda fundamental* $\lambda_o = 2\pi c/\omega_o$. Vemos que la perturbación consta de dos partes

$$y(x) = u(x + ct) + v(x - ct)$$

que se propagan el direcciones opuestas con velocidad c. En principio, estas dos funciones son *arbitrarias* y quedan determinadas completamente por las condiciones iniciales y de contorno.

23.3 Condiciones de contorno

Como la solución debe verificar las condiciones de contorno $y(0,t) = y(L,t) = 0$, ambas *ondas* deben estar presentes en la solución, y verificar

$$\begin{aligned} u(ct) &= -\,v(-ct) \\ u(L + ct) &= -\,v(L - ct) \end{aligned}$$

La primera condición nos dice que una solución está determinada por la otra, $v(x) = -\,u(-x)$. En otras palabras $\delta_s = 0$ para todo s, o sea que h_s es real, ¡tal como ya sabíamos!.

$$y(x,t) = u(ct + x) - u(ct - x)$$

La segunda condición nos dice ahora que $u(x + 2L) = u(x)$. En otras palabras, u debe ser una función periódica de período $2L$.

23.4 Reflexión

¿Cómo es que haciendo $v(x) = -\,u(-x)$ se puede lograr que una onda *viajera* se anule en el extremo $x = 0$?. Lo que encontramos aquí es un fenómeno de *reflexión*. A medida que una perturbación $u(x + ct)$ se dirige por la cuerda hacia $x = 0$, otra perturbación imaginaria, idéntica pero de signo opuesto se dirige hacia ese punto desde la otra dirección. Esto ocurre de manera tal que $y(0, t)$ se mantenga igual a cero en todo instante. A medida que la onda $u(x + ct)$ penetra en la zona imaginaria ($x < 0$), la onda $u(x-ct)$ emerge desde el borde. El efecto neto, es que la perturbación original se refleja en el borde, produciéndose simultáneamente un cambio de signo en la perturbación, equivalente a un cambio de fase en un factor π. Al llegar a $x = L$ se produce una reflexión similar, y la onda viaja de un extremo al otro con un período $2L/c$.

23.5 Condiciones iniciales

La condición inicial $y(x, 0)$ solo alcanza para determinar la parte impar de la función $u(x)$, ya que

$$y(x, 0) = u(x) - u(-x)$$

Para obtener $u(x)$ debemos conocer la velocidad transversal de la perturbación, ya que nos permite determinar la parte par de $u(x)$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = c\left(\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x} - \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{-x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u(x) + u(-x)\right)$$

23.6 Ecuación de ondas

Una función de la forma $y(x, t) = u(ct + x) - u(ct - x)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\, y = 0$$

Esta es la *ecuación de onda* unidimensional, que se repite en varias ramas de la ciencia en tanto aparezcan fenómenos ondulatorios.

Veamos si podemos recuperar esta ecuación en forma directa a partir de las ecuaciones de Lagrange. Ante perturbaciones transversales, la energía cinética de la cuerda es $T = \int_0^L \mu\, \dot{y}^2\, \mathrm{d}x/2$ y la energía potencial

$$V = \mathcal{F}\,\int_0^L\,\sqrt{1 + (\partial y/\partial x)^2}\;\mathrm{d}x \approx \mathcal{F}\left(L + \frac{1}{2}\,\int_0^L\,(\partial y/\partial x)^2\;\mathrm{d}x\right)$$

con lo cual, eliminando el término constante

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \mathcal{F} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}x$$

Este Lagrangiano es algo muy particular, ya que no es función de una serie de variables, sino de un continuo, de una función. En tal sentido se trata de un *funcional*, es decir de una función de funciones. En un próximo capítulo veremos como se puede lidiar con estos elementos matemáticos (y volveremos sobre este problema). Por ahora, intentaremos salir del paso, volviendo a discretizar el problema. Escribimos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left[\mu \left(\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t} \right)^2 - \mathcal{F} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{\ell} \right)^2 \right] \ell$$

y reconstruimos las ecuaciones de Lagrange

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j} = \left[\mu \frac{\mathrm{d}^2 y_j}{\mathrm{d}t^2} - \mathcal{F} \frac{y_{j+1} - y_j}{\ell^2} \right] \ell$$

Volviendo al sistema continuo, escribimos

$$0 = \mu \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \mathcal{F} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

que es, justamente, la ecuación de las ondas.

En el caso de un sistema elástico tridimensional isotrópico, la ecuación se escribe como

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - c^2 \nabla^2 y = 0$$

23.7 Ondas electromagnéticas en el vacío

Volvamos sobre la situación analizada al comienzo del capítulo 17 de un campo electromagnético arbitrario. Las leyes de Faraday de conservación del flujo nos indicaban que podíamos definir un potencial escalar ϕ y otro vectorial A tales que,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = \nabla\phi - \xi\partial\mathbf{A}/\partial t$$

donde ξ es una constante de proporcionalidad igual a 1 en el sistema internacional y a $1/c$ en el sistema gaussiano. Como se recordará, los potenciales no están completamente definidos por estas ecuaciones. En particular **E** y **B** quedan inalterados ante una sustitución $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi$ y $\phi \to \phi - \xi\partial\chi/\partial t$, con χ cualquier campo escalar. Esta propiedad de *invariancia de gauge o de medida* nos permite imponer una condición adicional sobre $\mathbf{A}$, que designamos de *gauge coulombiano o transversal*, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Cuando $\mathbf{A}$ satisface esta elección de gauge, $\phi = 0$, y con ello basta con $\mathbf{A}$ para caracterizar completamente al campo electromagnético,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\xi \partial \mathbf{A} / \partial t$$

Las otras dos leyes de Maxwell dependen de las cargas y corrientes que general en campo electromagnético. Sin embargo, en las zonas del espacio donde no hay cargas o corrientes presentes, podemos escribir

$$\begin{array}{rl} \text{Ley de Poisson} & \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \text{Ley de Ampere} & \nabla \times \mathbf{B} = \xi \mu_o \epsilon_o \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array}$$

donde ϵ_o y μ_o son la permitividad y la permeabilidad del vacío, respectivamente. En el sistema gaussiano, ambas constantes son iguales a 1, mientras que en el sistema internacional toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} \mu_o &= 4\pi \times 10^7 \,\text{Newton / Ampere}^2 \\ \epsilon_o &= 8.85 \times 10^{-12} \,\text{Coulomb}^2 \text{ / Newton metro}^2 \end{aligned}$$

La elección de los potenciales escalar y vectorial asegura que ley de Poisson se satisfaga automáticamente, mientras que -reemplazando en la ley de Ampere- obtenemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\xi^2 \mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

o sea

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

donde hemos definido la velocidad de la luz en el vacío $c = 1/\xi \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$. Finalmente, aplicando de nuevo la condición de gauge coulombiano $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, obtenemos la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

que reconocemos como una ecuación de ondas para un medio elástico.

Ante este resultado, no es de extrañar que en la segunda mitad del siglo XIX se imaginara la existencia de un medio elástico que diera el soporte material para la propagación de las ondas electromagnéticas. La inexistencia de este *éter*, demostrada a través de experimentos como los de Michelson y Morley, dieron uno de los principales apoyos empíricos para la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein.

23.8 Separación de variables

Una solución posible para una ecuación en derivadas parciales, puede obtenerse por el denominado *método de separación de variables.* Primero expresamos la solución como un producto

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cdot v(t)$$

No podemos asegurar que esta separación en una parte espacial y otra temporal funcione, pero muchas de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que se encuentran en varios problemas físicos son separables en al menos un sistema de coordenadas curvilíneas. Otros muchos, sobre todo si -como en este caso- involucran operadores laplacianos, pueden separarse en varios sistemas de coordenadas. Reemplazando en la ecuación de las ondas obtenemos

$$c^2\nabla^2\mathbf{u} = \mathbf{u}\,\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Como $\mathbf{u}$ y v dependen de distintas variables, es necesario que se verifiquen por separado las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} c^2\nabla^2\mathbf{u} + \omega^2\mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 v &= 0 \end{aligned}$$

con ω una constante apropiada. Las soluciones generales de estas ecuaciones son exponenciales, que podemos combinar en la siguiente forma

$$\mathbf{A} \propto \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm \omega t)$$

donde $\mathbf{k}$ es el denominado *número de onda*, cuyo módulo es igual a ω/c. Este vector, con unidades de inversa de longitud, es una medida del *número* longitudes de *onda* ($\lambda = 2\pi c/\omega$) que hay por unidad de longitud en cada dirección del espacio. Las condiciones de contorno fijan los valores posibles de $\mathbf{k}$, que usualmente están *cuantizados* en todo sistema acotado espacialmente. La solución general del problema es una suma (y/o integral) sobre todos estos posibles valores de $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{A} = \sum_n \mathbf{A}_n \exp i(\mathbf{k}_n\cdot\mathbf{r} \pm \omega_n t)$$

Las constantes $\mathbf{A}_n$, mientras tanto, quedan fijadas por las condiciones iniciales del problema.

23.9 Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz

La ecuación

$$\nabla^2\mathbf{u} + k^2\mathbf{u} = 0$$

muy común en problemas de la Mecánica Cuántica, se denomina *ecuación de Helmholtz*, en recuerdo del primero que las planteó en 1859 en relación con la propagación de ondas acústicas.
...

23.10 Medios dispersivos

En la cuerda elástica o en el campo electromagnético en el vacío, la relación entre la frecuencia y el número de onda es lineal,

$$\omega = c \cdot k$$

Consideremos ahora un ejemplo algo más complicado. Volvamos a analizar el resorte cargado del capítulo anterior. La frecuencia del modo s es

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{m\ell}}\ \sin\left(\frac{s\ \pi/2}{n+1}\right)$$

En esta expresión, el número de nodos de la solución estacionaria es justamente $s-1$, con lo cual la longitud de onda asociada es $\lambda_s = 2L/s$. Luego, podemos escribir el argumento de la función seno de la siguiente manera $s\ \ell\pi/2L = \ell\pi/\lambda_s$ o, en términos del número de onda,

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{m\ell}}\ \sin\left(\frac{k\ \ell}{2}\right)$$

Como s está limitado a tomar valores entre 1 y n, entonces $k = \pi s/L$ está limitado a valores menores que $k_{max} = \pi/\ell$. Escribimos entonces

$$\omega(k) = c\ k\ \frac{\sin\left(k\ \ell/2\right)}{k\ \ell/2} \qquad \text{con } \ 0 \leq k \leq \pi/\ell$$

Como esta expresión ya no contiene a n o L se aplica igualmente bien a un resorte finito o infinito.

Vemos que, en este caso, frecuencia depende del número de onda de una manera no lineal. Cuando ello ocurre, se dice que el medio elástico en el cual se propaga la onda es *dispersivo*. La relación anterior se denomina *ley de dispersión*.

Cuando $k = \pi/\ell$, el sistema está oscilando a su máxima frecuencia $\omega_o = 2c/\ell$. Pero, ¿qué pasaría si forzásemos al sistema a oscilar a una frecuencia mayor?. Obviamente la ley de dispersión anterior no nos permitirá alcanzar valores de ω mayores que ω_o a menos que consideremos valores complejos de $k\kappa - i\beta$, con lo cual,

$$\omega(k) = \omega_o\ \left[\sin\left(\kappa\ \ell/2\right)\cosh\left(\beta\ \ell/2\right) - i\cos\left(\kappa\ \ell/2\right)\sinh\left(\beta\ \ell/2\right)\right]$$

Para que ω siga siendo una cantidad real, la parte imaginaria debe anularse. Esto se puede lograr haciendo $\cos(\kappa\,\ell/2) = 0$ o $\sinh(k\,\ell/2) = 0$. Pero la segunda opción requeriría hacer $\beta = 0$, lo cual está en contra de nuestro requerimiento de hacer a k complejo. Tenemos entonces que $\cos(\kappa\,\ell/2) = 0$. O sea que si

$$k = \pi/\ell - i\beta$$

podemos alcanzar frecuencias mayores que ω_o. De hecho,

$$\omega(k) = \omega_o\ \cosh(\beta\,\ell/2)$$

Esto en cuanto a la matemática, pero ¿cuál podría ser el sentido físico de la parte imaginaria de un número de onda complejo?. Si reemplazamos en la onda $\mathbf{A} \propto \exp i(kx - \omega t)$ obtenemos

$$\mathbf{A} \propto e^{-\beta x}\ e^{i(\pi x/\ell - \omega t)}$$

El factor $\exp -\beta x$ representa una atenuación o *amortiguamiento* de la onda con la distancia x. En otras palabras, la onda se propaga sin atenuación si la frecuencia es menor que ω_o, pero se amortigua a frecuencia mayores, y ese amortiguamiento crece con la frecuencia. La frecuencia ω_o se denomina frecuencia *crítica* o de *corte*.

El sentido físico de las partes real e imaginaria de k es ahora más clara. β es un *coeficiente de atenuación*[1] que actúa cuando la frecuencia es mayor que el valor de corte ω_o, siendo

$$\beta = \frac{2}{\ell}\ \ln\left(\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_o^2}}{\omega_o}\right)\ \Theta(\omega - \omega_o)$$

23.11 William Thomson

La existencia de una frecuencia de corte en los sistemas elásticos fue descubierta por William Thomson en 1881.

...

23.12 Velocidad de fase

El argumento de una onda[2] $\mathbf{A} \propto \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$, se suele denominar *fase*,

$$\phi = \mathrm{Real}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{r} - \omega t$$

[1] A pesar de que la onda se amortigua, el sistema es aún conservativo. La razón de esta situación anómala estriba en que la fuerza que es necesario aplicar sobre cada masa del sistema para comenzar la onda está 90^o fuera de fase respecto de la velocidad, de manera tal que la potencia transferida $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ es nula. En realidad, todo sistema tiene algún tipo de pérdidas, y también hay atenuación para $\omega < \omega_o$.

[2] Hemos eliminado el doble signo del término temporal, permitiendo la existencia de frecuencias negativas.

Si moviésemos nuestro sistema de referencia con una velocidad $\mathbf{v}$ tal que la fase en cada punto del espacio sea idéntica, veríamos una onda estacionaria que mantiene su forma. Tal *velocidad de fase* es justamente, $v = \omega/\text{Real}(k)$. En una cuerda elástica, o en la propagación de una perturbación electromagnética en el vacío, la velocidad de fase es constante, e igual a la velocidad c que ya habíamos introducido anteriormente.

En un resorte cargado, en cambio, la velocidad de fase toma la siguiente forma no lineal

$$v = c\,\frac{\sin(k\,\ell/2)}{k\,\ell/2} = c\,\frac{\omega/\omega_o}{\arcsin(\omega/\omega_o)}$$

mientras $\omega < \omega_o$. Si $\omega > \omega_o$, en cambio,

$$v = \frac{\omega}{\text{Real}(k)} = \frac{\omega\ell}{\pi} = c\,\frac{\omega/\omega_o}{\pi/2}$$

Vemos que $v \to c$ cuando $\omega \to 0$. Este resultado es natural, en tanto que si la longitud de onda es grande comparado con ℓ, las ondas son menos sensibles al espaciado entre partículas.

23.13 Velocidad de grupo

Consideremos un medio elástico infinito, la solución general de la correspondiente ecuación de ondas es

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{A}(\mathbf{k}) \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\mathrm{d}\,\mathbf{k}$$

Si $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ toma valores significativos sólo en la vecindad de un número de onda particular $\mathbf{r}_o$, entonces decimos que la expresión anterior representa un *paquete de onda*. Desarrollando la ley de dispersión del medio en la vecindad de $\mathbf{r}_o$ tenemos,

$$\omega \approx \omega(\mathbf{k}_o) + (\nabla_{\mathbf{k}}\omega)_{\mathbf{k}_o} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_o) + \cdots$$

con lo cual, la fase es

$$\phi = \mathbf{k}_o \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k}_o)\,t + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_o) \cdot (\mathbf{r} - (\nabla_{\mathbf{k}}\omega)_{\mathbf{k}_o}\,t) + \cdots$$

Reemplazando en el paquete de onda tenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \Big\{ \mathbf{A}(\mathbf{k}) \exp i \Big[\, (\mathbf{k} - \mathbf{k}_o) \cdot (\mathbf{r} - (\nabla_{\mathbf{k}}\omega)_{\mathbf{k}_o}\,t) \,\Big] \Big\}\; e^{i(\mathbf{k}_o\cdot\mathbf{r} - \omega_o\,t)}\;\; \mathrm{d}\mathbf{k}$$

Dado el alcance restringido de $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, la fase del término entre paréntesis, proporcional a $\mathbf{k} - \mathbf{k}_o$, varía muy lentamente con la posición y el tiempo, y puede considerarse como una amplitud efectiva que forma una envolvente de las ondas. Este *grupo* de ondas se mueve con una velocidad

$$u(\mathbf{k}_o) = (\nabla_{\mathbf{k}}\omega)_{\mathbf{k}_o}$$

Si el medio es no dispersivo, la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase. En un medio dispersivo, en cambio, ambas velocidades pueden ser distintos. En nuestro ejemplo del resorte cargado, obtenemos $u(k) = c\ \cos(k\ell/2)$ o, en función de la frecuencia,

$$u(\omega) = c\,\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}$$

Debe destacarse que un tren infinito de ondas de una dada frecuencia no es útil para transmitir información. Tal transmisión debe lograrse en base a la modulación de, por ejemplo, su amplitud, es decir formando paquetes de onda. Como consecuencia de este hecho, la velocidad de transmisión no está representada por la velocidad de fase, sino por la de grupo, que en sistemas sin atenuación es siempre menor que aquella.