Capítulo 24

Cálculo de variaciones

24.1 Principio de Fermat

Ahora vamos a ver una manera completamente distinta de construir la Mecánica, a partir de una idea que se fue desarrollando lentamente desde mucho tiempo antes de que Newton publicara sus *Principia*, para confluir y fusionarse con el desarrollo de aquel a principios del siglo XVIII de la mano de los Bernoulli, Lagrange y Hamilton.
...

Volviendo a nuestro tema, Descartes trató de justificar su ley de refracción a través de la premisa de que la luz viaja más rápido en el medio más denso. Veinte años más tarde, el matemático francés de origen vasco Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne 17 Agosto 1601, Castres 12 de Enero de 1665) advirtió que esta suposición de Descartes parecía estaba en contradicción con la idea aristotélica de un ahorro en los procesos naturales. Fermat supuso que al ir de un punto a otro, la luz lo hace por el camino más rápido. Así que si la luz pasa de un punto A en un medio donde se mueve con velocidad v_1 a otro B en un medio donde la velocidad es v_2, minimizando el tiempo empleado, se obtiene la ley de refracción

$$\frac{\mathrm{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\mathrm{sen}\theta_2}{v_2}$$

Fermat enunció este resultado en 1658. Años más tarde Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) observó que la ley de reflexión de Herón se podía considerar como un caso particular de la ley de Fermat, para el caso de velocidades iguales $v_1 = v_2$, y Christiaan Huygens (1629 - 1695) amplió la idea de Fermat, considerando trayectorias no rectilineas en un medio donde la velocidad de la luz varía continuamente. Así quedó firmemente establecido el *Principio de Fermat* de mínimo tiempo para los movimientos de la luz.

24.2 La familia Bernoulli

...

En 1697 Johann se había interesado en el problema de *braquistocrona*, que ya había sido discutido por Galileo. Este consistía en encontrar el camino recorrido por una partícula bajo la acción de la gravedad para llegar desde un punto a otro en el mínimo tiempo posible. Para espolear a sus contemporáneos, Jakob ofreció una recompensa por su solución. Su hermano Johann se propuso ganar ese premio. Observó que un problema similar había sido resuelto por Huygens, aunque no precisamente referido a la caída de los cuerpos, sino a la propagación de la luz. Entonces se le ocurre sustituir el movimiento de caída por el de propagación de la luz. Los puntos de salida y llegada se encuentran en un medio donde la velocidad de la luz aumenta hacia abajo con la misma ley que la velocidad de caída. Si el medio se compone de estratos horizontales de densidad decreciente hacia abajo, la velocidad de la luz en un estrato estará dada por la ley de Galileo $v = \sqrt{2gx}$, donde x es la profundidad respecto del punto superior. Según Johann, el camino recorrido por la luz en el mínimo tiempo, será igual al que recorrería una partícula en iguales circunstancias.

Ahora Johann divide el espacio en una serie de estratos y aplica la ley de refracción de Fermat a cada uno de ellos, donde

$$\frac{\mathrm{sen}\theta_j}{v_j} = \frac{\mathrm{sen}\theta_{j+1}}{v_{j+1}} = k \qquad \text{constante}$$

Ahora, si x indica la distancia vertical hacia abajo e y la distancia horizontal desde el punto de salida, podemos traducir esta ecuación como

$$\frac{1}{v}\,\frac{\delta y}{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}} = k$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kv}{\sqrt{1 - k^2 v^2}}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $v = \sqrt{2gx}$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2R - x}} \qquad \text{con} \qquad R = \frac{1}{4gk^2}$$

Esta es la ecuación de una *cicloide*, descrita por un punto de la circunferencia de radio R que rueda sobre una recta horizontal por el punto de salida. El radio R queda determinado por la condición de que la cicloide pase por el punto de llegada.

...

24.3 Leonhard Euler

...

24.4 Cálculo de variaciones

Ahora estudiaremos las ecuaciones básicas del cálculo de variaciones. Por la notación que vamos a utilizar, enseguida van a descubrir la dirección en que apuntamos. Pero quisiera pedirles que intenten hacer abstracción de ese conocimiento, imaginando el problema desde una perspectiva más amplia. Allá vamos...

Sea $\mathcal{L}$ un campo escalar de varias variables q_1, ..., q_n y de sus derivadas $\dot{q}_1$, ..., $\dot{q}_n$, todas magnitudes dependientes del parámetro t. Nuestro interés es hallar la función $q_j(t)$ que hacen extremo al *funcional*

$$\mathcal{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q_1, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n; t)dt$$

Entendemos por *funcional* a un ente matemático que relaciona una función con un número.

Puesto que $\mathcal{L}$ es de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n)$, la integral $\mathcal{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}dt$ sólo puede calcularse si se conocen las funciones $q_j(t)$ $(j = 1, ..., n)$ en el rango $t_i \leq t \leq t_f$. Es en este sentido que decimos que $\mathcal{J}$ es un funcional dependiente de las funciones $q_j(t)$ $(j = 1, ..., n)$.

Una elección arbitraria de las funciones $q_j(t)$ $(j = 1, ..., n)$ define una curva en el espacio de dimensión $n+1$ determinado por las coordenadas generalizadas $q_j(t)$ $(j = 1, ..., n)$ y el tiempo t. Repetimos que la elección de esta curva es completamente arbitraria. Suponemos que también pueden variar tanto las coordenadas q_j como los tiempos t que definen los extremos de la curva. Nuestro objetivo es encontrar entre todas las curvas que podamos elegir en el espacio de dimensión $n+1$ uniendo el punto inicial y final, aquella ó aquellas para las cuales el funcional $\mathcal{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}dt$ tiene un valor extremo (máximo ó mínimo).

El valor del funcional en la curva levemente variada (y con levemente queremos indicar a primer orden) es

$$\mathcal{J} + \mathrm{d}\mathcal{J} = \int_{t_i+\mathrm{d}t_i}^{t_f+\mathrm{d}t_f} \mathcal{L}(q_1 + \delta q_1, ..., q_n + \delta q_n; \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n + \delta\dot{q}_n; t)dt$$

Aquí debe entenderse que al variar las coordenadas generalizadas $q_j'(t) = q_j(t) + \delta q_j(t)$, también han variado las velocidades $\dot{q}_j{}'(t) = dq_j/dt + d\delta q_j(t)/dt$, pero no de manera independiente. Al escribir $\dot{q}_j{}'(t) = \dot{q}_j + \delta\dot{q}_j$ hemos realizado un abuso de notación que debe entenderse como

$$\delta\dot{q}_j = \frac{d\delta q_j}{dt}$$

A primer orden en las variaciones obtenemos

$$\mathcal{J} + \mathrm{d}\mathcal{J} = \left(\int_{t_i+\mathrm{d}t_i}^{t_i} + \int_{t_i}^{t_f} + \int_{t_f}^{t_f+\mathrm{d}t_f} \right) (\mathcal{L}(q_1, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n; t) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \Bigg) dt$$

Ahora calculamos las integrales $\int_{t_i+\mathrm{d}t_i}^{t_i}$ y $\int_{t_f}^{t_f+\mathrm{d}t_f}$ por valor medio,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} + \mathrm{d}\mathcal{J} &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\mathcal{L}(q_1, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n; t) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \right) dt \\ &+ \left(\mathcal{L}(q_1, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n; t) \delta t + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\mathcal{L} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \right) dt + \mathcal{L}\ \mathrm{d}t \Bigg|_{t_i}^{t_f} \end{aligned}$$

donde hemos simplificado la notación y eliminado términos de segundo orden en la variación. Tenemos entonces

$$\mathrm{d}\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt + \mathcal{L}\ \mathrm{d}t \Bigg|_{t_i}^{t_f}$$

Ahora utilizamos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{\delta q_j}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}} \right) \delta q$$

para escribir nuestro resultado final

$$\mathrm{d}\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j dt + \left(\mathcal{L}\ \mathrm{d}t\ + \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_j} \right)\ \delta q_j \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f}$$

24.5 Ecuación de Euler - Lagrange

Supongamos que la variación del funcional anterior es tal que se mantienen fijos los extremos de la trayectoria en el espacio de configuración. En tal caso la ecuación se reduce a

$$\delta \mathcal{J} = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}} \right) \right)\ \delta q_j\ dt$$

Ahora nos interesa conocer la trayectoria $q_j(t)$ que hace extremo al funcional $\mathcal{L}$, o sea tal que $\delta\mathcal{J} = 0$. Si suponemos que las funciones $q_j(t)$ son independientes entre sí, también lo serán las variaciones $\delta q_j(t)$. Por lo tanto $\delta\mathcal{J}$ será nulo sí y solo sí se anulan los coeficientes de las variaciones $\delta q_j(t)$ se anulan por separado

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}}\right) = 0$$

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de *ecuaciones diferenciales de Euler - Lagrange*. Sus soluciones representan aquellas trayectorias $q_j(t)$ que anulan la variación de una integral $\mathcal{J}$ de la forma estudiada.

24.6 El problema de la braquistocrona

Como ejemplo de aplicación, resolvamos nuevamente el problema de la braquistocrona utilizando el método de Euler-Lagrange. Si ds es la longitud de un arco de la trayectoria que la partícula recorre con velocidad v, el problema consiste en hallar el mínimo tiempo T para ir del punto x_1, y_1 al punto x_2, y_2, dado por la integral

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

Igual que antes, indicamos con x la distancia vertical hacia abajo y con y la distancia horizontal desde el punto de salida. Por el teorema de conservación de la energía sabemos que, $mv^2/2 = mgx$; con lo cual $v = \sqrt{2gx}$. La expresión anterior resulta

$$T = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Este es un problema de cálculo de variaciones con extremos fijos, cuya solución está dada por la ecuación de Euler - Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{y}}\right) = 0$$

donde $\dot{y} = dy/dx$ y $\mathcal{L} = \sqrt{(1+\dot{y}^2)/x}$. Puesto que $\partial\mathcal{L}/\partial y = 0$, la ecuación anterior nos dice que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{y}} = \text{constante} = \sqrt{\frac{1}{2R}}$$

Calculando la derivada del funcional $\mathcal{L}$ y elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{\dot{y}^2}{x(1+\dot{y}^2)} = \frac{1}{2R}$$

A partir de esta expresión recuperamos la ecuación diferencial de la cicloide obtenida por Johann Bernoulli hace tres siglos,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2R - x}}$$

Ahora hacemos el siguiente cambio de variables $x = R(1 - \cos\theta)$, que nos conduce a

$$\frac{dy}{d\theta} = R(1 - \cos\theta)$$

y a la solución $y = R(\theta - \mathrm{sen}\theta) + \text{constante}$. Ubicando el punto de partida en el origen del sistema de coordenadas, la constante es igual a cero y la braquistocrona queda determinada por la ecuación paramétrica

$$\begin{aligned} x &= R(1 - \cos\theta) \\ y &= R(\theta - \mathrm{sen}\theta) \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una cicloide, que el lugar geométrico recorrido por un punto en el perímetro de una rueda de radio R que rueda por el eje y. La constante R está determinada por las coordenadas del punto de llegada x_2, y_2. El tiempo de recorrido es igual a

$$T = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_i^2 d\theta$$

En la figura mostramos el alcance máximo que podría alcanzar una partícula a un dado tiempo, moviéndose a lo largo de una braquistocrona. Esta envolvente se obtiene reemplazando el radio $R = Tg^2/\theta^2$ en la curva paramétrica de la cicloide

$$\begin{aligned} x &= gT^2(1 - \cos\theta)/\theta^2 \\ y &= gT^2(\theta - \mathrm{sen}\theta)/\theta^2 \end{aligned}$$

Para comparación, hemos graficado el alcance de la partícula a lo largo de una trayectoria rectilínea, que en coordenadas polares (con ϕ medido desde la vertical) está dada por la expresión ya conocida

$$r = \frac{1}{2} gT^2 \cos\phi$$

Vemos que esta envolvente es un círculo de radio $gT^2/2$, un resultado ya conocido por Galileo.

24.7 El péndulo cicloidad o *tautocrono*

...

Consideremos una partícula de masa m que se mueve por acción de la gravedad, a lo largo de la cicloide estudiada en la sección anterior. La aceleración a lo largo de la cicloide es

$$m\dot{v} = mg\frac{dy}{ds}$$

calculamos $dx = R(1 - \cos\theta)d\theta$, $dy = R\mathrm{sen}\theta d\theta$ y $ds^2 = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = 2R^2(1 - \cos\theta)d\theta^2$. O sea que $ds = 2R\mathrm{sen}(\theta/2)d\theta$. Tenemos entonces

$$v = \frac{ds}{dt} = 2R\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{dt} = -4R\frac{d}{dt}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

y

$$\frac{dy}{ds} = \frac{R\mathrm{sen}\theta}{2R\mathrm{sen}(\theta/2)} = \cos\frac{\theta}{2}$$

Reemplazando en la ecuación de Newton $m\dot{v} = mgdy/ds$, obtenemos finalmente

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{g}{4R}\cos\frac{\theta}{2}$$

Esta ecuación difiere de la de un péndulo simple de pequeña amplitud, sólo en que ahora la variable es $\cos\theta/2$ en lugar de θ. Por supuesto que esto no tiene ninguna consecuencia al integrar la ecuación, salvo que ahora el péndulo es exactamente isócrono, es decir que el período es *siempre* igual a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$$

independientemente de la amplitud de la oscilación. Por este motivo, el péndulo cicloidal se suele denominar *tautocrono*. Huyghens también descubrió la manera de construir un péndulo cicloidal, al advertir que la evolvente de una cicloide es otra cicloide idéntica. Así que ató un péndulo simple de longitud $4R$ a la cúspide entre dos arcos de una cicloide, de manera que estas guiaran su vaivén. En la práctica, esta idea de Huyghens fue abandonada y reemplazada por el uso de un pequeño resorte en el extremo superior del péndulo. Cálculos realizados principalmente por Bessel (1784-1846) mostraron que una adecuada elección de la masa del péndulo y la longitud y constante elástica del resorte permitían lograr un grado aceptable de isocronismo.

24.8 Problemas de isoperímetro

...

24.9 Para saber más

- P. K. Araviand: *Simplified approach to brachistochrome problems.* Am J. Phys. **49** (9), 884 (1981). Utiliza el método de Bernoulli para encontrar la braquistocrona en el interior de una esfera homogénea.