Capítulo 25

Principio de Hamilton

25.1 Sir William Rowan Hamilton

...

25.2 Principio de Hamilton

Las ecuaciones de Euler - Lagrange que dedujimos en el capítulo anterior nos llevan sin más a enunciar al siguiente resultado

> **Principio de Hamilton:** El movimiento de un sistema conservativo[1] entre los tiempos t_1 y t_2 es tal que la integral curvilinea
>
> $$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \, \mathrm{d}t$$
>
> es un extremo respecto de la trayectoria.

Este resultado es válido en tanto que es completamente equivalente a las ecuaciones de Lagrange. Es importante destacar la diferencia entre este resultado y las ecuaciones de Lagrange. Estas partían de la consideración del estado instantáneo del sistema, suponiendo pequeños desplazamientos virtuales en un entorno de aquel. Es decir que su deducción se basaba en un *principio diferencial*. En el principio de Hamilton se considera el movimiento completo del sistema, teniendo en cuenta pequeñas variaciones virtuales de tal movimiento completo. Un principio de este tipo se suele denominar *principio integral*.

Analicemos un poco más en detalle este resultado. Puesto que el Lagrangiano $\mathcal{L}$ es de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, ..., q_{3N-k}; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{3N-k})$, la integral $\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \, \mathrm{d}t$ sólo

[1]conservativo en sentido lato, admitiendo potenciales generalizados dependientes de la velocidad

puede calcularse si se conocen las funciones $q_j(t)$ $(j = 1, ..., 3N - k)$ en el intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$. Es en este sentido que decimos que $\mathcal{J}$ es un funcional dependiente de la trayectoria del sistema.

Si elegimos arbitrariamente las funciones $q_j(t)$ $(j = 1, ..., 3N - k)$, entonces obtenemos una cierta trayectoria cinemáticamente posible, es decir un movimiento compatible con las ligaduras del sistema. En el espacio de dimensión $3N - k + 1$ determinado por las coordenadas generalizadas $q_j(t)$ $(j = 1, ..., 3N - k)$ y el tiempo t, esta trayectoria define una curva que une el punto $q_1(t_1), ..., q_{3N-k}(t_1), t_1$ que caracteriza al estado inicial del sistema, con el punto $q_1(t_2), ..., q_{3N-k}(t_2), t_2$, que caracteriza al estado final. La elección de esta curva es arbitraria, salvo por sus dos extremos que están fijos.

En principio,la única restricción que deberíamos imponer a la elección de esta curva es que el movimiento que define no debe violar las ligaduras impuestas al sistema. Pero esta condición se satisface automáticamente, en tanto que representemos el movimiento en términos de coordenadas generalizadas "independientes".

Sabemos que entre todas las curvas que podamos elegir en el espacio de dimensión $3N - k + 1$ entre los puntos que determinan los estados inicial y final del sistema, hay una sola que representa al movimiento real del sistema. La llamaremos *trayectoria real*. Al resto las llamaremos *trayectorias ficticias*. Lo que nos dice el Principio de Hamilton es que el funcional $\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, \mathrm{d}t$ tiene un valor extremo (máximo ó mínimo) en la trayectoria real, respecto de las trayectorias ficticias.

Que para describir la variación $\delta\mathcal{J}$ del funcional $\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, \mathrm{d}t$ usemos la misma expresión que para los desplazamientos virtuales en el Principio de d'ALembert no es casual. De hecho, ambos representan variaciones de las variables compatibles con los vínculos impuestos al sistema y a tiempo fijo. Con esto queremos decir que la variación no afecta al tiempo. Esta requerimiento, que -como recordarán- era esencial en el enunciado del Principio de d'Alembert, no resulta tan obvia aquí, pero puede comprenderse mejor por medio de un ejemplo: Consideremos una familia de curvas $q'_1 = q'_1(t, \alpha), ..., q'_{3N-k} = q'_{3N-k}(t, \alpha), t' = t'(t, \alpha)$ en el espacio de dimensión $3N - k + 1$, definida por un parámetro α de manera tal que contiene la trayectoria real para $\alpha = 0$ y que todas las restantes trayectorias con $\alpha \neq 0$ son ficticias. En principio exigimos que todas las trayectorias tengan los mismos puntos inicial y final. Hasta aquí todo es claro, pero además estamos pidiendo que la variación sea "virtual". Exigimos que la variación no actúe sobre el tiempo, es decir que $t'(t, \alpha) = t$.

En el capítulo siguiente estudiaremos otro principio integral, denominado de *Mínima Acción* ó de *Maupertuis*, que es anterior a este que estamos analizando aquí. La diferencia esencial es que en él, se permite la variación del tiempo.

25.3 Generalización del Principio de Hamilton

Vamos a escribir la variación de $\mathcal{J}$ en una forma alternativa

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{J} &= \delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2} T\,\mathrm{d}t - \delta\int_{t_1}^{t_2} V\,\mathrm{d}t \\
&= \delta\int_{t_1}^{t_2} T\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{\partial V}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\,\delta\dot{q}_j\right]\mathrm{d}t \\
&= \delta\int_{t_1}^{t_2} T\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{\partial V}{\partial q_j}\,\delta q_j + \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j\right)\right]\mathrm{d}t \\
&= \delta\int_{t_1}^{t_2} T\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{3N-k}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\,\delta q_j\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j\,\mathrm{d}t \\
&= \delta\int_{t_1}^{t_2} T dt - 0 + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{3N-k} Q_j\,\delta q_j\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

donde hemos usado que los extremos de la trayectoria están fijos ($\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$), y la definición de potencial generalizado

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Finalmente, como $\sum_{j=1}^{3N-k} Q_j\delta q_j$ es el trabajo de las fuerzas aplicadas, excluidas las fuerzas de ligadura, $\delta W = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-k} Q_j\delta q_j$, obtenemos

$$\delta\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2}\delta(T+W)\,\mathrm{d}t$$

Vemos que, para sistemas conservativos, la variación $\delta\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2}\delta(T+W)\,\mathrm{d}t$ de este nuevo funcional es idéntica a la del funcional $\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,\mathrm{d}t$. Pero además, este nuevo funcional nos va a permitir generalizar el principio de Hamilton a fin de incluir sistemas no conservativos y vínculos no holónomos. En efecto, operando con variaciones arbitrarias $\delta\mathbf{r}_i$ de las trayectorias de cada partícula, y sin imponer ninguna condición sobre las fuerzas aplicadas ó los vínculos, obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{I} &= \int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i^2\right) + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i\right]dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\dot{\mathbf{r}}_i.\delta\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i\right]dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\mathbf{r}}_i.\delta\mathbf{r}_i\right) - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i.\delta\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i.\delta\mathbf{r}_i\right]dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i . \delta \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \ddot{\mathbf{r}}_i . - \mathbf{F}_i \right] \delta \mathbf{r}_i dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \ddot{\mathbf{r}}_i . - \mathbf{F}_i \right] \delta \mathbf{r}_i dt
\end{aligned}
$$

Y si ahora aplicamos el Principio de d'Alembert,

$$
\sum_{i=1}^{N} \left[m_i \ddot{\mathbf{r}}_i . - \mathbf{F}_i \right] \delta \mathbf{r}_i = 0
$$

obtenemos que $\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T+W) dt = 0$. La inversa, es decir que si $\delta \mathcal{I} = 0$ entonces se cumple el Principio de d'Alembert, no es tan inmediata, ya que nada nos autoriza a anular el integrando.

Para dar este último paso, repetimos la deducción que nos llevó del Principio de d'Alembert a las ecuaciones de Lagrange para escribir

$$
\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3N-k} \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right] dt = 0
$$

Si los vínculos son holónomos, las variaciones δq_j de las coordenadas deben ser independientes entre si, y por lo tanto, para que se anule la variación del funcional $\delta \mathcal{I}$, se tienen que anular los coeficientes individuales

$$
\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j = 0 \qquad j = 1, ..., 3N-k
$$

Y estas no son otras que las ecuaciones de Lagrange para cualquier tipo de fuerzas aplicadas. Por otra parte, si existen m vínculos anholónomos, pero expresables en forma diferencial,

$$
\sum_{j=1}^{3N-k} a_{\ell j} \dot{q}_j + a_{\ell t} = 0
$$

podemos utilizar multiplicadores de Lagrange λ_ℓ bajo el signo integral para extraer nuevamente los coeficientes individuales correspondientes a cada variación δq_j. Recuperamos así las ecuaciones de Lagrange

$$
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \tilde{Q}_j - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell a_{\ell j} = 0 \qquad \text{para} \qquad j = 1, ..., 3N-k
$$

Con esto completamos la demostración, y enunciamos:

> **Principio generalizado de Hamilton:** El movimiento de un sistema cualquiera entre los tiempos t_1 y t_2 es tal que
>
> $$\delta \mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) \, dt = 0$$
>
> respecto de la trayectoria real.

Esta forma del Principio de Hamilton contiene toda la Mecánica, tal como el Principio de d'Alembert o las ecuaciones de Newton. Landau lo presenta como la piedra fundamental de su elegante desarrollo de la Mecánica[2]. Antes que él, Helmholtz había pasado a basar todos sus últimos trabajos en este principio, extendiéndolo incluso a la electrodinámica. Hertz, en cambio, indicaba erróneamente que el Principio de Hamilton es válido sólo para sistemas holónomos.

25.4 Principio de Hamilton modificado

Cuando estudiamos las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\dot{p}_j = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j} \qquad , \qquad \dot{q}_j = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j}$$

destacamos el hecho de que las coordenadas generalizadas q_j y los momentos canónicos $p_j = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_j$ aparecieran en un pie de igualdad, satisfaciendo similares ecuaciones de movimiento. Esta observación nos impulsa a intentar construir un Principio integral donde, no sólo se varíen las $3N-k$ coordenadas q_j (tal como ocurre en el Principio de Hamilton), sino también los $3N-k$ momentos canónicos p_j. Usando la definición del Hamiltoniano, escribimos

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q,p,t) \right) dt$$

donde se debe entender que el integrando es función las $3N-k$ coordenadas q_j, los $3N-k$ momentos canónicos p_j y el tiempo, pero ya no de las velocidades generalizadas $\dot{q}_j$. Para ello hemos invertido la definición de los momentos canónicos $p_j = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_j$ para expresar las velocidades $dotq_j$ en términos de los p_j, *id est* $dotq_j = \dot{q}_j(q_1, ..., q_{3N-k}; p_1, ..., p_{3N-k}; t)$. Al afirmar que esta inversión es posible, estamos suponiendo que la relación entre los p_j y q_j no es degenerada. En otras palabra, decimos que

$$\det \left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_\ell} \right) \neq 0$$

Ahora vamos a variar las $3N-k$ coordenadas q_j y los $3N-k$ momentos canónicos p_j. El problema es que estas variables no son independientes, sino que están relacionadas por las mismas ecuaciones que permitieron reemplazar las velocidades generalizadas por los momentos canónicos. Para resolver esta dificultad, escribimos estas *ligaduras* en base a las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\dot{q}_j - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j} = 0$$

[2]L. D. Landau and E. M .Lifshitz: Mechanics (Pergamon Press, Oxford, 1976

y las incluimos en la funcional $\mathcal{J}$ utilizando multiplicadores de Lagrange,

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q,p,t) + \sum_{j=1}^{3N-k} \lambda_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \right] dt$$

Ahora sí, podemos variar independientemente las variables q_j, p_j y λ para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_j} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_j} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\lambda}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_j} &= 0 \end{aligned}$$

más las condiciones de ligadura

$$\dot{q}_j - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j} = 0$$

donde

$$\mathcal{F}(q,p,t,\lambda) = \sum_{j=1}^{3N-k} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q,p,t) + \sum_{j=1}^{3N-k} \lambda_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right)$$

La primera ecuación nos conduce a

$$\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \sum_{\ell=1}^{3N-k} \lambda_j \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_\ell} = 0$$

que, junto con las condiciones de ligadura $\dot{q}_j - \delta\mathcal{H}/\delta p_j = 0$, nos dicen que

$$\sum_{\ell=1}^{3N-k} \lambda_j \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_\ell} = 0$$

Sin embargo, debido a nuestra suposición de que el sistema no es degenerado, ya sabemos que

$$0 \neq \det\left(\frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial p_j} \right) = \det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_j \partial p_\ell} \right)$$

y, por lo tanto, la única solución posible es que los multiplicadores de Lagrange sean todos iguales a cero

$$\lambda_j = 0 \qquad \text{para} \qquad j = 1, ..., 3N-k$$

Esto significa que en el principio variacional, obtendremos el mismo resultado aún si ignoramos las ligaduras y, en el funcional

$$\mathcal{J}(q,p,t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q,p,t) \right) dt,$$

variamos las coordenadas q_j y los momentos p_j en forma independiente.

> **Principio modificado de Hamilton:** El movimiento de un sistema conservativo entre los tiempos t_1 y t_2 es tal que la integral curvilinea
>
> $$\mathcal{J}(q,p,t) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(q,p,t) \right) dt$$
>
> es un extremo respecto de la variación de las coordenadas generalizadas q_j y los momentos canónicos p_j en forma independiente.

Puede parecer que con este resultado no hemos ganado mucho, sino todo lo contrario, y esto es cierto desde el punto de la Mecánica Clásica, ya que ahora debemos lidiar con el doble de variables que en el principio de Hamilton original. Si analizamos el Principio de Hamilton original en el espacio de $2(3N-k)+1$ dimensiones determinado por q_j, p_j y t, las variaciones de las funciones $q_j(t)$ y p_j no eran independientes, sino que estaban relacionadas por las ecuaciones canónicas $\dot{q}_j = \delta\mathcal{H}/\delta p_j$. Ahora, en cambio, admitimos que esas variaciones virtuales sean arbitrarias e independientes, de manera que para las trayectorias ficticias no se satisfaga necesariamente que $\mathcal{L} = \sum p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}$, puesto que ya no son necesariamente válidas las ecuaciones $\dot{q}_j = \delta\mathcal{H}/\delta p_j$.

Como decía, por ahora no hemos ganado nada, sino todo lo contrario. La ventaja de esta formulación se hará evidente al extender estos resultados a la Mecánica Cuántica, donde las coordenadas y los momentos conjugados, ya no es que pueden, sino que *deben* tratarse en un pie de igualdad.

Por último, dejo como ejercicio para el lector, el obtener las ecuaciones canónicas de Hamilton a partir de este Principio Integral.

25.5 Para saber más

- John R. Ray: *Modified Hamilton's Principle*, Am. J. Phys. **41** (10), 1188-90 (1973). La demostración del Principio Modificado de Hamilton en base a la utilización de multiplicadores de Lagrange proviene de este artículo.

- F. Gantmacher: *Lectures in Analytical Mechanics* (Mir Publisher, Moscow, 1975).