Capítulo 27

Invariantes integrales

27.1 Invariante integral de Poincaré - Cartan

Consideremos nuevamente una variación infinitesimal arbitraria y sin restricciones de la trayectoria en el espacio de dimensión $3N - k + 1$ determinado por las coordenadas generalizadas q_j $(j = 1, ..., 3N - k)$ y el tiempo t. De hecho, estamos estudiando el caso más general posible, donde pueden variar tanto las coordenadas como el tiempo de los estados inicial y final del sistema. En el capítulo anterior demostramos que el valor del funcional $\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$ en la trayectoria levemente variada (es decir al primer orden) es

$$\mathrm{d}\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{3N-k} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j dt + \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f}$$

Supongamos que realizamos una variación tal que "todas" las trayectorias son *reales*. Evidentemente, esto sólo será posible si también cambiamos los extremos de la trayectoria. En dicho caso, la integral de la expresión anterior es nula, y la fórmula para la variación del funcional $\mathcal{J}$ toma la forma

$$\mathrm{d}\mathcal{J} = \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f}$$

Consideremos ahora el espacio de dimensión $2(3N - k) + 1$ formado por las coordenadas generalizadas q_j, los momentos canónicos p_j y el tiempo. Consideramos una curva cerrada $\mathcal{C}_i$ cualquiera en dicho espacio. Cada punto de esta curva lo consideramos como el punto inicial para una trayectoria real. Estas trayectorias están unívocamente determinadas por el punto inicial por las ecuaciones canónicas de Hamilton. Obtenemos así un tubo de trayectorias reales. Sobre la superficie de este tubo elegimos arbitrariamente una segunda curva $\mathcal{C}_{\{}$, con la única condición de que tenga un único punto común con cada generatriz. Sabemos que, sobre cada una de las trayectorias reales que generan el tubo se cumple la ecuación anterior.

$$\mathrm{d}\mathcal{J} = \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f}$$

Para fijar ideas, y sin pérdida de generalidad, parametrizamos cada trayectoria real del tubo por medio de un parámetro arbitrario α ($0 \leq \alpha \leq 1$). En tal caso, podemos escribir la expresión anterior de la siguiente manera

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} \mathrm{d}\alpha = \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i(\alpha)}^{t_f(\alpha)}$$

Integrando entre $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, obtenemos

$$0 = \mathcal{J}(1) - \mathcal{J}(0) = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i(\alpha)}^{t_f(\alpha)}$$

O sea

$$\int_{\mathcal{C}_i} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) = \int_{\mathcal{C}_f} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right)$$

Hemos demostrado así que la integral de línea

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{C}} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right)$$

tomada a lo largo de un contorno cerrado arbitrario en el espacio de dimensión $2(3N-k)+1$ formado por las coordenadas generalizadas q_j, los momentos canónicos p_j y el tiempo, no cambia su valor en el caso de un desplazamiento arbitrario (con deformación) del contorno a lo largo de un tubo de trayectorias reales. En otras palabras, es un *invariante integral.* Denominaremos a la integral $\mathcal{K}$ *invariante integral de Poincaré-Cartan.*

También se puede demostrar la inversa, esto es que si la integral de Poincaré-Cartan es un invariante respecto de un tubo de trayectorias; entonces estas son reales. Para realizar esta demostración, Vemos que así como el parámetro α define una trayectoria del tubo, podemos definir un parámetro adicional μ $(0 \leq \mu < 1)$ que fije un punto de esa trayectoria. Así, si mantenemos $\mu =$ constante y variamos α obtenemos una curva cerrada alrededor del tubo. Debido a la invariancia de $\mathcal{K}$, realizando una variación de μ bajo el signo integral, obtenemos

$$0 = \int_{\mathcal{C}_\mu} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} (\Delta p_j \, \mathrm{d}q_j + p_j \, \Delta \mathrm{d}q_j) - \Delta\mathcal{H} \, \mathrm{d}t - \mathcal{H} \, \Delta \mathrm{d}t \right)$$

Ahora escribimos $\mathrm{d}\Delta q_j$ y $\mathrm{d}\Delta t$ en lugar de $\Delta \mathrm{d}q_j$ y $\Delta \mathrm{d}t$, e integramos por partes alrededor del circuito cerrado, para obtener[1]

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{C}_\mu} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} (\Delta p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathrm{d}p_j \, \Delta q_j) - \Delta\mathcal{H} \, \mathrm{d}t + \mathrm{d}\mathcal{H} \, \Delta t \right) \\
&= \int_{\mathcal{C}_\mu} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} (\Delta p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathrm{d}p_j \, \Delta q_j) - \Delta\mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} \mathrm{d}p_j + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} \mathrm{d}t \right) \, \Delta t \right) \\
&= \int_{\mathcal{C}_\mu} \left[\sum_{j=1}^{3N-k} \left(\Delta p_j + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \, \Delta t \right) \, \mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{3N-k} \left(-\Delta q_j + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} \, \Delta t \right) \, \mathrm{d}p_j \right. \\
&\quad \left. + \left(-\Delta\mathcal{H} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} \, \Delta t \right) \, \mathrm{d}t \right] \\
&= \int_{\mathcal{C}_\mu} \left[\sum_{j=1}^{3N-k} \left(\frac{\Delta p_j}{\Delta t} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \, \mathrm{d}q_j + \sum_{j=1}^{3N-k} \left(-\frac{\Delta q_j}{\Delta t} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \, \mathrm{d}p_j \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\Delta\mathcal{H}}{\Delta t} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} \right) \, \mathrm{d}t \right] \, \Delta t
\end{aligned}$$

La expresión bajo el signo integral debe ser un diferencial total, con un factor arbitrario $\Delta t = (\partial t / \partial \mu) \, \Delta\mu$. Pero esto es posible sólo si la expresión entre corchetes es nula. Obtenemos entonces que, para cada generatriz del tubo, *i. e.* para cada trayectoria, se cumple que

$$\frac{\Delta p_j}{\Delta t} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \qquad \frac{\Delta q_j}{\Delta t} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} \qquad \frac{\Delta\mathcal{H}}{\Delta t} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Finalmente, como la única variación de las variables q_j, p_j y t a lo largo de la trayectoria, se debe a una variación del parámetro μ, podemos escribir las ecuaciones anteriores como

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \qquad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} \qquad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Y como estas son las ecuaciones canónicas de Hamilton, hemos completado la demostración.

El lector atento ya habrá advertido que con este resultado hemos demostrado que la invariancia de la integral de Poincaré-Cartan puede adoptarse como principio fundamental de la Mecánica para sistemas conservativos con vínculos holónomos. Ya hemos encontrado una serie de ecuaciones básicas:

[1]Es lícito intercambiar las operaciones Δ y d puesto que representan una diferenciación con respecto a variables independientes μ y α, respectivamente.

- Ecuaciones de Newton
- Principio de d'Alembert
- Ecuaciones de Lagrange
- Ecuaciones canónicas de Hamilton
- Principio de Hamilton
- Invariante integral de Poincaré-Cartan

Todas ellas son equivalentes y cualquiera puede utilizarse como base para desarrollar la Mecánica.

Demos una mirada más detallada a la integral de Poincaré - Cartan.

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{C}} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right)$$

Vemos que el tiempo t entra en la ecuación de igual manera que la coordenada q_j, mientras que $-\mathcal{H}$ lo hace igual que el momento p_j. Esta analogía es bastante llamativa, y tendrá importantes implicaciones en el desarrollo formal de la Mecánica Cuántica.

Por ahora, es evidente que podríamos hacer que una de las coordenadas, por ejemplo la q_1, tome el lugar del tiempo t. En este caso, p_1 tomaría el lugar de $\mathcal{H}$, que pasaría a ser una variable más. Para ello, despejamos p_1 de la ecuación $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, ..., q_{3N-k}; p_1, ..., p_{3N-k}; t)$,

$$p_1 = p_1(q_1, ..., q_{3N-k}; \mathcal{H}, p_2, ..., p_{3N-k}; t)$$

Las mismas consideraciones que nos llevaron a las ecuaciones canónicas de Hamilton, nos conducirían ahora a

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} &\leftrightarrow\quad \frac{d\mathcal{H}}{dq_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial t} \\
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} &\leftrightarrow\quad \frac{dt}{dq_1} &= \frac{\partial p_1}{\partial \mathcal{H}} \\
\frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} &\leftrightarrow\quad \frac{dp_j}{dq_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial q_j} \\
\frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} &\leftrightarrow\quad \frac{dq_j}{dq_1} &= -\frac{\partial p_1}{\partial p_j} \\
\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &\leftrightarrow\quad \frac{dp_1}{dq_1} &= \frac{\partial p_1}{\partial q_1}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones tiene el mismo aspecto que antes, pero ahora el rol de la variable independiente está representado por q_1. Para aclarar esta simetría bastante esotérica entre las variables espaciales y el tiempo, consideremos el caso de un oscilador lineal. A partir de la expresión para el Hamiltoniano, $\mathcal{H} = p^2/2m + kq^2/m$ despejamos $p = \sqrt{2m\mathcal{H} - mkq^2}$ y reemplazamos en las dos primeras ecuaciones canónicas de la serie anterior,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dq} = -\frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathcal{H}}{dq} = 0$$

$$\frac{dt}{dq} = \frac{\partial p_1}{\partial \mathcal{H}} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dq} = \sqrt{\frac{m/k}{2\mathcal{H}/k - q^2}}$$

La primera ecuación nos dice $\mathcal{H} =$ constante. Integrando la segunda respecto de q obtenemos

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\int \frac{\mathrm{d}q}{2\mathcal{H}/k - q^2} - \phi_o \right) = \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\mathrm{arcsen} \sqrt{\frac{k}{2\mathcal{H}}} - \phi_o \right)$$

donde ϕ_o es una constante de integración arbitraria. Despejando q respecto de t

$$q = \sqrt{\frac{2\mathcal{H}}{k}} \,\mathrm{sen} \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_o \right)$$

vemos que no hemos hecho otra cosa que recuperar la solución general del problema, aunque por un camino poco usual.

27.2 Invariante integral universal de Poincaré

Volvamos al invariante integral de Poincaré - Cartan

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{C}} \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \,\mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \,\mathrm{d}t \right)$$

y consideremos un circuito $\mathcal{C}$ enteramente consistente en estado simultáneos del sistema. Tal contorno se obtiene al cortar un tubo de trayectorias reales con un hiperplano $t =$ constante. Para tal contorno, $\mathrm{d}t = 0$ y el invariante integral toma la forma

$$\mathcal{K}_1 = \int_{\mathcal{C}} \sum_{j=1}^{3N-k} p_j \,\mathrm{d}q_j$$

que, evidentemente, también es un invariante integral. Esta integral fue introducida por Poincaré (1854 - 1912). Más tarde Cartan extendió su definición par incluir estados no simultáneos introduciendo el sumando adicional $-\mathcal{H}\mathrm{d}t$.

La integral de Poincaré no cambia su valor si desplazamos el contorno $\mathcal{C}$ a lo largo del tubo de trayectorias reales hasta otro $\mathcal{C}'$ que también consista de estados simultáneos. Es conveniente considerar a la integral $\mathcal{K}_1$ en el espacio de fases usual (no-extendido) de dimensión $2(3N-k)$ formado por las coordenadas generalizadas $q_1, ..., q_{3N-k}$ y los momentos canónicos $p_1, ..., p_{3N-k}$. En este espacio, los circuitos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ se corresponden con circuitos $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ alrededor del correspondiente tubo de trayectorias reales. Uno de los contornos (digamos el $\mathcal{D}$) se puede elegir de una manera bastante arbitraria, pero el otro no. Por ejemplo, si elegido el contorno $calD$ suponemos que sus puntos son distintos estados simultáneos del sistema a un dado tiempo t, entonces los estados a otro tiempo t' formaran el contorno $\mathcal{D}'$, de manera tal que

$$\int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j = \int_{\mathcal{D}'} \sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j$$

27.3 Jules Henri Poincaré

27.4 Élie and Henri Paul Cartan

27.5 Teorema de Lee Hwa-Chung

Las integrales de Poincaré y de Poincaré-Cartan se denominan invariantes integrales *relativas* de *primer orden*, puesto que el dominio de integración es un contorno cerrado e involucra el cálculo de integrales de una variable. Sin embargo advertimos que, por medio de la formula de Stokes, podemos convertir una integral de primer orden, como $\mathcal{K}_1$, en una de integral *absoluta* de segundo orden

$$\mathcal{K}_1 = \int_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j = \int_{\mathcal{S}} \sum_{j<\ell}^{3N-k} \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_\ell} \right) \, \mathrm{d}q_j \, \mathrm{d}q_\ell = \int_{\mathcal{S}} \sum_{j=1}^{3N-k} \mathrm{d}q_j \, \mathrm{d}p_j$$

donde $\mathcal{S}$ es una superficie cualquiera limitada por el contorno $\mathcal{D}$ en el espacio de las fases. Podemos generalizar esta definición, definiendo las series de integrales relativas

$$\mathcal{K}_{2n-1} = \int \sum p_{j_1} \, \mathrm{d}q_{j_1} \, \mathrm{d}q_{j_2} \, \mathrm{d}p_{j_2} ... \mathrm{d}q_{j_n} \, \mathrm{d}p_{j_n}$$

y absolutas

$$\mathcal{J}_{2n} = \int \sum \mathrm{d}p_{j_1} \, \mathrm{d}q_{j_1} \, \mathrm{d}q_{j_2} \, \mathrm{d}p_{j_2} ... \mathrm{d}q_{j_n} \, \mathrm{d}p_{j_n}$$

donde $n = 1, ..., 3N - k$. Utilizando el teorema de Stokes, es fácil ver que $\mathcal{K}_{2n-1} = \mathcal{J}_{2n}$. Por otra parte, y aunque la demostración sea más complicada, se puede demostrar que todas estas integrales son invariantes. Más aún, en 1947 el matemático chino Lee Hwa-Chung demostró su unicidad, en el sentido de que cualquier otro invariante integral sólo podría diferir de alguno de los enumerados aquí en una constante multiplicativa. Por ejemplo, para el caso $n = 1$, si una integral arbitraria

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \int \sum_{j=1}^{3N-k} (A_j(q_1, ..., q_{3N-k}; p_1, ..., p_{3N-k}; t)\, \mathrm{d}q_j \\ &\quad + B_j(q_1, ..., q_{3N-k}; p_1, ..., p_{3N-k}; t)\, \mathrm{d}p_j)\end{aligned}$$

es un invariante integral relativo, entonces el teorema de Lee Hwa-Chung indica que debe cumplirse que

$$\mathcal{M} = c\mathcal{K}_1$$

donde c es una constante y $\mathcal{K}_1$ es la integral de Poincaré.