Capítulo 28

Teorema de Liouville

28.1 Invariancia de volumen en el espacio de las fases

Consideremos el invariante integral absoluto de mayor orden posible

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{J}_{3N-k}}{(3N-k)^{3N-k}} = \int \mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}p_1\,\mathrm{d}q_j\,\mathrm{d}p_j...\mathrm{d}q_{j_{3N-k}}\,\mathrm{d}p_{3N-k}$$

La invariancia de esta integral implica la invariancia del volumen en el espacio de las fases. Es decir que si consideramos un dado volumen $\mathcal{D}_i$ en el espacio de las fases representando posibles estados iniciales de un dado sistema, su evolución posterior no altera el volumen $\mathcal{D}$ ocupado por los puntos representativos del sistema en un instante posterior cualquiera t. Aunque en la sección anterior enunciamos la invariancia de esta integral, aquí la demostraremos para este caso particular.

Podemos escribir las variables generalizadas y momentos conjugados al tiempo t, soluciones de las ecuaciones canónicas de Hamilton, como funciones del tiempo y la condición inicial

$$q_j = q_j(q_1^i, ..., q_{3N-k}^i; p_1^i, ..., p_{3N-k}^i; t) \qquad p_j = p_j(q_1^i, ..., q_{3N-k}^i; p_1^i, ..., p_{3N-k}^i; t)$$

Con esto, reescribimos la integral $\mathcal{J}$ al tiempo t como una integral sobre las variables del estado inicial

$$\mathcal{J} = \int \ |I|\,\mathrm{d}q_1^i\,\mathrm{d}p_1^i\,\mathrm{d}q_j^i\,\mathrm{d}p_j^i...\mathrm{d}q_{j_{3N-k}}^i\,\mathrm{d}p_{3N-k}^i$$

donde

$$I = \frac{\partial(q_1, ..., q_{3N-k}; p_1, ..., p_{3N-k})}{\partial(q_1^i, ..., q_{3N-k}^i; p_1^i, ..., p_{3N-k}^i)}$$

es el Jacobiano de la transformación. En el instante inicial $I = 1$. Por ser de utilidad para la demostración, haremos una observación bastante obvia. Esta es que todas las derivadas parciales que entran en el cálculo de este Jacobiano son iguales a cero, excepto

$$\left.\frac{\partial q_j}{\partial q_j^i}\right|_{t=0} = 1 \qquad \left.\frac{\partial p_j}{\partial p_j^i}\right|_{t=0} = 1 \qquad (j = 1, ..., 3N - k)$$

Lo que queremos demostrar es que el Jacobiano I permanece igual a la unidad al variar el tiempo t. Para ello nos basta con demostrar que la derivada temporal de I es igual a cero en el instante inicial. Calculamos esta derivada

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{2(3N-k)} I_n|_{t=0}$$

donde I_n es el determinante que se obtiene al derivar la enésima fila del Jacobiano. Pero, en virtud de que the casi todas las derivadas que entran en el cálculo del Jacobiano se anulan para $t = 0$, excepto $\partial q_j/\partial q_j^i$ y $\partial p_j/\partial p_j^i$ $(j = 1, ..., 3N - k)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} &= \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_j^i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_j}{\partial p_j^i}\right)\right]_{t=0} = \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j^i} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j^i}\right]_{t=0} \\ &= \sum_{j=1}^{3N-k}\left[\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial q_j^i \partial p_j^i} - \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_j^i \partial q_j^i}\right]_{t=0} = 0\end{aligned}$$

28.2 Teorema de Liouville

De la invariancia del volumen en el espacio de las fases se deduce el teorema básico de la Mecánica Estadística, el teorema de Liouville.

Imaginemos un número muy grande de réplicas absolutamente idénticas de un dado sistema, que difieren unas de otras solamente en sus estados iniciales $(q_1^i, ..., q_{3N-k}^i; p_1^i, ..., p_{3N-k}^i)$. Todas estas réplicas forman lo que se denomina un *ensemble estadístico* del sistema. Un ejemplo de ensemble lo constituyen las moléculas de un gas en un dado volumen.

A cada elemento de volumen ΔV del espacio de las fases podemos asignarle un dado número de réplicas ΔN. Al evolucionar el sistema, estas réplicas pasarán a ocupar un nuevo volumen que, por la demostración de la sección anterior, no varía. En otras palabras, la densidad del ensemble

$$\rho(q_1, ..., q_{3N-k}; p_1, ..., p_{3N-k}; t) = \Delta N/\Delta V$$

permanece constante. O sea

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Con esto hemos demostrado el siguiente teorema

La densidad de un ensemble estadístico es una integral de movimiento

o en forma expandida

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_j^{3N-k}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\rho}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_j^{3N-k}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_j}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial\rho}{\partial p_j}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + [\rho, \mathcal{H}]$$

donde hago la presentación formal de un operador que -en diferentes formas- nos acompañará a lo largo de toda la carrera, el *corchete de Poisson*

$$[f, g] = \sum_j^{3N-k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right)$$

28.3 Joseph Liouville

28.4 Corchetes de Poisson

La operación $[f, g]$ que hemos definido en la sección anterior fue creada por el matemático francés Siméon-Denis Poisson
...
Es fácil demostrar que los corchetes de Poisson verifican las siguientes *ecuaciones fundamentales*

1. $[q_j, q_\ell] = 0$
2. $[p_j, p_\ell] = 0$
3. $[q_j, p_\ell] = \delta_{j\ell}$

Algunas propiedades elementales, casi evidentes, son:

$$\begin{aligned}
[f, g] &= -[g, f] \\
[f, f] &= 0 \\
[f, c] &= 0 \qquad \text{para } c = \text{ constante} \\
[cf_1 + f_2, g] &= c[f_1, g] + [f_2, g] \\
[f_1 f_2, g] &= f_1[f_1, g] + f_2[f_2, g] \\
\partial[f, g]/\partial t &= [\partial f/\partial t, g] + [f, \partial g/\partial t] \\
[q_j, f] &= \partial f/\partial p_j \\
[p_j, f] &= -\partial f/\partial q_j
\end{aligned}$$

También incluimos en este listado, un resultado hallado en la sección anterior

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}]$$

Vemos que si el tiempo no aparece explícitamente en una dada magnitud f, su derivada total respecto al tiempo se reduce al corchete de Poisson con $\mathcal{H}$. De manera que si $[f, \mathcal{H}]$, entonces f es constante de movimiento.

Un último resultado interesante relacionado con los corchetes de Poisson se obtiene al escribir con ellos las ecuaciones canónicas de Hamilton, lo que pone en evidencia la gran simetría de esta formulación

$$[q_j, \mathcal{H}] = \dot{q}_j \qquad [p_j, \mathcal{H}] = \dot{p}_j$$

28.5 La identidad de Jacobi

Enunciamos aquí la *identidad de Jacobi*

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

Este resultado puede verificarse directamente por fuerza bruta, aunque en varios textos de mecánica se puede encontrar una demostración indirecta muy elegante[1].

Esta ley nos permite, conocidas dos constantes de movimiento, hallar una tercera. En efecto, si g y h dos son constantes de movimiento que no dependen explícitamente del tiempo, entonces $[g, h]$ también es una constante de movimiento. Este resultado se conoce como *Teorema de Jacobi - Poisson*[2]. La demostración es sencilla y se basa en la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[f, g] &= \frac{\partial}{\partial t}[f, g] + [[f, g], \mathcal{H}] \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] + [f, [g, \mathcal{H}]] + [g, [\mathcal{H}, f]] \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}], g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g, \mathcal{H}]\right] \\
&= \left[\frac{df}{dt}, g\right] + \left[f, \frac{dg}{dt}\right]
\end{aligned}$$

Luego, si f y g son constantes de movimiento, también lo es su corchete de Poisson.

Debe entenderse, sin embargo, que la nueva integral de movimiento que podamos hallar por este procedimiento, bien puede ser idénticamente nula, o conducirnos a una integral ó función de integrales ya conocidas. Por ejemplo, para una partícula libre, aplicando el corchete de Poisson a las tres componentes del impulso p_x, p_y y p_z, sólo nos da un resultado nulo. Por otra parte, el corchete de

[1] Ver, por ejemplo, en H. Goldstein: *Classical Mechanics* (Addison-Wesley Publ, Reading, 1959).

[2] En algunos textos se lo denomina Teorema de Poisson.

Poisson de dos componentes cualesquiera del momento angular L_x, L_y y L_z nos conduce a la tercera componente.

$$[L_x, L_y] = L_z \qquad [L_y, L_z] = L_x \qquad [L_z, L_x] = L_y$$

28.6 Jakob Jacobi