Capítulo 30

La Ecuación de Hamilton - Jacobi

30.1 Introducción

La teoría de las transformaciones canónicas nos conduce directamente al resultado más importante de la teoría de sistemas dinámicos, la ecuación de Hamilton-Jacobi. Consideremos un sistema holónomo que obedece las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \qquad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}$$

Ahora intentaremos encontrar una transformación canónica libre ($\partial(Q)/\partial(p) \neq 0$ y univalente ($c \neq 1$) tal que el nuevo Hamiltoniano sea idénticamente nulo ($H = 0$). Si esto es así, entonces las nuevas ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\frac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial P_j} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}P_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial Q_j} = 0$$

pueden integrarse directamente, para obtener

$$Q_j(q,p,t) = \alpha_j \qquad P_j(q,p,t) = -\beta_j$$

donde α_j y β_j son $2(3N-k)$ constantes arbitrarias. Invirtiendo la transformación canónica $(q,p) \leftrightarrow (Q,P)$, obtenemos finalmente la solución completa del problema

$$q_j = q_j(\alpha,\beta,t) \qquad p_j = p_j(\alpha,\beta,t)$$

donde cada variable es función de las $2(3N-k)$ constantes arbitrarias, determinadas por las condiciones iniciales del problema y el tiempo.

El problema ahora consiste en encontrar la función generatriz $S(q,Q,t)$ que logra este objetivo, es decir tal que

$$\mathcal{H}(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Esto, junto con la ecuación $\partial S/\partial q_j = p_j$, nos lleva a la ecuación de Hamilton - Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0$$

o, en forma no compacta,

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_1, ..., q_{3N-k}; Q_1, ..., Q_{3N-k}; t) + \mathcal{H}(q_1, ..., q_{3N-k}; \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_{3N-k}}, t) = 0$$

O sea que los pasos para resolver un problema dinámico en esta formulación consiste en encontrar la función generatriz $S(q, Q, t)$ que satisface esta ecuación en derivadas parciales junto con la condición

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial q_j\, \partial Q_\ell}\right) \neq 0$$

Una vez obtenida esta función generatriz, las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = cp_j \qquad \frac{\partial S}{\partial Q_j} = -P_j$$

definen, tal como vimos, la transformación canónica que estamos buscando. Si en estas fórmulas finales, reemplazamos $Q_j = \alpha_j$ y $P_j = -\beta_j$, donde α_j y β_j son $2(3N-k)$ constantes arbitrarias, obtenemos la solución final y completa del problema. Este proceso de resolución se describe más convenientemente si desde el comienzo reemplazamos Q_j por las constantes α_j. Enunciamos entonces el siguiente teorema debido a Jacobi

> Si $S = S(q_1, ..., q_{3N-k}; \alpha_1, ..., \alpha_{3N-k}; t)$ es una integral completa de la ecuación de Hamilton - Jacobi
>
> $$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(q_1, ..., q_{3N-k}; \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_{3N-k}}, t) = 0$$
>
> con la condición
>
> $$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial q_j\, \partial \alpha_\ell}\right) \neq 0$$
>
> entonces, las ecuaciones de movimientos del sistema son
>
> $$\frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j$$
>
> donde α_j y β_j son $2(3N-k)$ constantes arbitrarias

¿Qué hemos ganado con la ecuación de Hamilton-Jacobi?. Pues ahora el doble problema de encontrar las ecuaciones de movimiento y luego integrar ese sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que es finalmente lo que está en el fondo de cualquier otra construcción formal de la dinámica, aquí se reduce a un único problema de encontrar la solución de una única ecuación en derivadas parciales.

30.2 Función principal de Hamilton

La anterior no es la forma original en que Hamilton imaginó esta nueva estructura para la Mecánica. Para ver como era esa primera formulación, volvamos a considerar una variación arbitraria de nuestra vieja conocida funcional del Hamiltoniano $\mathcal{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q,p,t)dt$. En un capítulo anterior demostramos que a primer orden en la variación se verifica que

$$\mathrm{d}\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{3N-k} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j dt + \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f}$$

Igual que antes, supongamos que realizamos una variación tal que "todas" las trayectorias son *reales*. Evidentemente, esto sólo será posible si también cambiamos los extremos de la trayectoria. En dicho caso, la integral de la expresión anterior es nula, y la fórmula para la variación del funcional $\mathcal{J}$ toma la forma

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{J} &= \left(\sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f} \\ &= \sum_{j=1}^{3N-k} p_j^f \, \mathrm{d}q_j^f - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t_f - \sum_{j=1}^{3N-k} p_j^i \, \mathrm{d}q_j^i + \mathcal{H} \, \mathrm{d}t_i \end{aligned}$$

Elegimos ahora la variación de las condiciones iniciales sobre un hiperplano de tiempo constante $\mathrm{d}t_i = 0$, y escribimos en forma general $q^f = q$, $p^f = p$ y $t^f = t$, con lo cual

$$\mathrm{d}\mathcal{J} = \sum_{j=1}^{3N-k} p_j \, \mathrm{d}q_j - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{3N-k} p_j^i \, \mathrm{d}q_j^i \tag{30.1}$$

Y ahora es cuando Hamilton se vuelve loco: Propone reemplazar en la definición del funcional a $\mathcal{J} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q,p,t)dt$, a q y p por sus soluciones reales $q = q(q^i, p^i, t)$ y $p = p(q^i, p^i, t)$, de manera tal que $\mathcal{J}$ ya no es un funcional de las funciones q y p sino una *función* de las condiciones iniciales (q^i, p^i) y el tiempo t. Y ahora vuelta para atrás, Hamilton propone reemplazar p^i en esta nueva función por la inversa de la solución $q = q(q^i, p^i, t)$, con lo cual $\mathcal{J}$ pasa a ser una función de las variables espaciales q, sus valores iniciales q^i y el tiempo t. Esta función $\mathcal{J} = \mathcal{J}(q, q^i, t)$ se denomina *función principal de Hamilton*.

Veamos esto con un ejemplo, consideremos el funcional $\mathcal{J} = \int_{t=0}^{t} \mathcal{L}(q,p,t')\mathrm{d}t' = \int_{t=0}^{t} \frac{p^2}{2m}\mathrm{d}t'$ correspondiente a una partícula libre. Siguiendo la propuesta de Hamilton, reemplazamos la solución $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o t$, $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}_o$, obteniendo

$$\mathcal{J} = \int_{t=0}^{t} \frac{1}{2} m v_o^2 \mathrm{d}t' = \frac{1}{2} m v_o^2 \, t$$

Continuando con el plan de Hamilton invertimos la ecuación $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}_o t$, escribiendo $\mathbf{v}_o = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)/t$ y reemplazamos en la expresión anterior obtenemos

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o, t) = \frac{1}{2} m v_o^2 \, t = \frac{m}{2t} \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_o \right|^2$$

Esta es la función principal de Hamilton para la partícula libre.

Bueno, dejemos ahora el ejemplo y volvamos a la ecuación (30.1), donde si $\mathcal{J} = \mathcal{J}(q, q^i, t)$ es la función principal de Hamilton tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_j} = p_j \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q^i_j} = -p^i_j \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} = -\mathcal{H}(q, p, t)$$

Por ejemplo, para la partícula libre tenemos que

$$\mathbf{p} = \nabla \mathcal{J} = \frac{m}{t} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o \right) \qquad \mathbf{p}^i = -\nabla_{\mathbf{r}_o} \mathcal{J} = \frac{m}{t} \left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o \right)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} = \frac{m}{2t^2} \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_o \right|^2$$

que, escritas como, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + (\mathbf{p}/m)\, t$; $\mathbf{p} = \mathbf{p}^i$ y $\mathcal{H} = p^2/2m$, dan la trayectoria de una partícula libre.

Volviendo al caso general, y reemplazando las primeras ecuaciones en la última vemos que la función principal de Hamilton satisface la ecuación de Hamilton - Jacobi. Con este resultado, Hamilton pudo demostrar que las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en términos de una solución de la ecuación en derivadas parciales que hoy conocemos como de Hamilton-Jacobi. Sin embargo, para recuperar el resultado que tan laboriosamente hemos hallado en este capítulo, faltaría demostrar que tal solución no es arbitraria y al no hacerlo, Hamilton cayó en un círculo vicioso. Para escribir las ecuaciones de movimiento anteriores $\partial \mathcal{J} = \partial q_j = p_j$ y $\partial \mathcal{J}/\partial q^i_j = -p^i_j$ Hamilton necesitaba la función principal de Hamilton, pero para construir esta función necesitaba conocer las soluciones de esas ecuaciones. Con esto, el resultado obtenido por Hamilton no pasa de ser una rareza sin aplicación posible. El mérito de Jacobi está en haber demostrado que las ecuaciones de movimiento se podían escribir en términos de una solución arbitraria, aunque con la restricción $\det(\partial^2 \mathcal{S}/\partial q_j \, \partial \alpha_\ell) \neq 0$, de la ecuación de Hamilton - Jacobi.

Con todo, la deducción de Hamilton nos está diciendo algo muy interesante, y esto es que las condiciones iniciales (q^i, p^i) están ocupando el lugar de las variables (Q, P) en la transformación canónica que anula el Hamiltoniano. En otras palabras, la ecuación de Hamilton Jacobi nos está diciendo cómo podemos pasar de las condiciones iniciales (q^i, p^i) a la solución del problema (q, p) por medio de una transformación canónica (que también es libre y univalente) cuya función generatriz S es ni más ni menos que la función principal de Hamilton $S = -\mathcal{J}(q, q^i, t)$

(El cambio de signo se debe a que estamos invirtiendo la transformación canónica $(q, p) \to (Q, P) = (q^i, p^i)$. En otras palabras, el movimiento de un sistema Hamiltoniano puede entenderse como una trasformación en el espacio de las fases que lleva de la condición inicial (q^i, p^i) al estado (q, p) del sistema en cualquier instante posterior t. Bueno, lo que acabamos de ver nos dice que esta transformación es canónica libre y univalente.

30.3 Tratamiento de las coordenadas cíclicas

Supongamos un sistema conservativo ($\partial H/\partial t = 0$). La ecuación de Hamilton - Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

se puede integrar inmediatamente en el tiempo escribiendo

$$S = -Et + W(q_1, ..., q_{3N-k}, \alpha_1, ..., \alpha_{3N-k-1})$$

donde E, α_1, ..., α_{3N-k-1} son las $3N - k$ constantes arbitrarias asociadas a la solución de la ecuación en derivadas parciales. Reemplazando en la ecuación de Hamilton - Jacobi encontramos la siguiente ecuación[1] para la función W:

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

con la condición

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_j\, \partial \alpha_\ell}\right) \neq 0$$

(donde para simplificar la notación hemos definido $\alpha_{3N-k} = E$. Vemos que el número de variables independientes del problema se ha reducido en uno.

Igual simplificación se puede lograr en el caso general donde exista un cierto número m de coordenadas cíclicas $q_{3N-k-m+1}$, ..., q_{3N-k}, escribiendo la solución de la ecuación de Hamilton - Jacobi como

$$S = \sum_{j=3N-k-m+1}^{3N-k} \alpha_j q_j + W(q_1, ..., q_{3N-k}; \alpha_1, ..., \alpha_{3N-k}, t)$$

donde la función W satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales (con $3N - k - m$ variables q y el tiempo t)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{H}(q_1, ..., q_{3N-k-m}; \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_{3N-k-m}}, \alpha_{3N-k-m+1}, ..., \alpha_{3N-k}; t) = 0$$

[1]Adviértase que la función E que multiplica al tiempo en S no puede ser una función arbitraria de las variables, pues en tal caso $\mathcal{H}$ en la siguiente ecuación sería una función explícita de t a través de las derivadas parciales $\partial W/\partial q$.

30.4 Oscilador unidimensional

Como aplicación de los resultados anteriores consideremos una partícula en presencia de una energía potencial $V = V(\mathbf{r})$. Escribimos $S = -Et + W(\mathbf{r}, \alpha_1, \alpha_2)$, donde W es solución de

$$E = \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p} = \nabla W) = (\nabla W)^2/2m + V(\mathbf{r})$$

Ya volveremos a esta ecuación en un momento, pero antes estudiaremos un caso particular dado un oscilador con un sólo grado de libertad. Su Hamiltoniano es $\mathcal{H} = p^2/2m + kq^2/2$. La solución de la ecuación de Hamilton - Jacobi se escribe $S = -Et + W(q, E)$ donde W es solución de $(\partial W/\partial q)^2/2m + kq^2/2 = E$. O sea

$$S = -Et + \int \sqrt{2mE - mkq^2}\, dq$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento $\partial S/\partial q = p$ obtenemos $p = \sqrt{2mE - mkq^2}$; y reemplazando en $\partial S/\partial E = \beta$,

$$-t + \frac{1}{\omega} \int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} = \beta$$

donde he escrito $A^2 = 2E/k$ y $\omega^2 = k/m$. La integral anterior es igual al arcsenq/A, con lo cual

$$q = A \operatorname{sen} \omega(t + \beta)$$

30.5 Partícula libre

Para una partícula libre, tenemos -salvo por una constante aditiva- la solución inmediata $W = \mathbf{p}_o.\mathbf{r}$, donde el módulo del vector p_o es $p_o = \sqrt{2mE}$. Las ecuaciones $\partial S/\partial q_j = p_j$ nos conducen inmediatamente a $\mathbf{p} = \mathbf{p}_o$. Por otro lado, las ecuaciones $\partial S/\partial \alpha_j = \beta_j$ nos conducen a[2] $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + (\mathbf{p}_o/m)t$. Recuperamos así la trayectoria de una partícula libre, y la siguiente expresión para la función $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_o, t) = -Et + \mathbf{p}_o.\mathbf{r}$$

Es instructivo aquí comparar esta expresión con la correspondiente a la función principal de Hamilton

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o, t) = \frac{m}{2t} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|^2$$

[2] Con las ecuaciones $\partial S/\partial \alpha_j = \beta_j$ hay que tener el cuidado de recordar que las tres constantes dadas por las coordenadas del vector $\mathbf{p}_o$ están relacionadas con la constante E por $p_o^2 = 2mE$. Así que al calcular las derivadas $\partial S/\partial p_o$ hay que tener el cuidado de recordar que $E = E(\mathbf{p}_o)$.

Puede verse que ambas expresiones coinciden salvo por una constante aditiva $\mathbf{p}_o.\mathbf{r}_o$. En efecto

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_o, t) - \mathbf{p}_o.\mathbf{r}_o = -(p_o^2/2m)t + \mathbf{p}_o.(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$$

y usando la ecuación de la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + (\mathbf{p}_o/m)t$, para reemplazar $\mathbf{p}_o = m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)/t$ obtenemos

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, \mathbf{p}_o, t) - \mathbf{p}_o.\mathbf{r}_o = \frac{m}{2t}\, |\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|^2 = \mathcal{J}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o, t)$$

Con este resultado tal vez resulte más claro en que consistía el círculo vicioso del método de Hamilton, ya que para recuperar la función principal $\mathcal{J}$ debimos apelar al conocimiento de la trayectoria.

30.6 Ondas de acción

Si nos concentramos en la solución de la ecuación de Hamilton - Jacobi para una partícula libre

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = -Et + \mathbf{p}.\mathbf{r}$$

vemos que tiene un aspecto sospechoso, similar a la fase de una onda plana. En efecto, al variar el tiempo la superficie $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{S}_o =$ constante, se propaga en la dirección $\hat{p}$ con una velocidad $u = E/p$. En efecto, en un tiempo $t + \mathrm{d}t$ cada punto de la superficie $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{S}_o =$ se ha corrido a una nueva posición $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$ dada por

$$\mathcal{S}_o = \mathcal{S}(\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}, t + \mathrm{d}t) = \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) + \nabla\mathcal{S}.\mathrm{d}\mathbf{r} + \frac{\partial S}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{S}_o + \mathbf{p}.\mathrm{d}\mathbf{r} - E\,\mathrm{d}t$$

con lo cual $\mathbf{p}.\mathrm{d}\mathbf{r} = E\,\mathrm{d}t$ y por lo tanto la velocidad de propagación de la onda es $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = (E/p)\,\hat{p}$.

Este resultado nos esta llevando a imaginar que la partícula es acompañada por una onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$ tal que $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$ es su fase. Esta onda se suele denominar *onda de acción*. Para el caso de una partícula libre podríamos escribir una función de onda asociada

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)\right)$$

donde $\hbar$ es una constante que estamos obligados a incluir para mantener las unidades.

Vemos que la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula libre es completamente equivalente a la siguiente ecuación sobre la función de ondas

$$\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi + \frac{i}{\hbar}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0$$

Por ahora esto no pasa de ser una curiosidad matemática, pero en la siguiente sección llevaremos esta analogía un paso más allá, llegando a las puertas de la Mecánica Cuántica.

30.7 Ecuación de Schrödinger

Escribimos la forma más general posible para la función de onda asociada a la partícula

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \mathcal{A}(\mathbf{r},t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(\mathbf{r},t)\right)$$

donde, por ahora, $\hbar$ no es más que una constante que estamos obligados a incluir para mantener las unidades. Veamos ahora si -tal como hicimos para una partícula libre- podemos encontrar una ecuación para esta onda $\Psi(\mathbf{r},t)$, tal que si ella se verifica, entonces vale también que la ecuación de Hamilton - Jacobi

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 + V(\mathbf{r}) = 0$$

Por un lado tenemos que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\,\mathcal{A}\,\frac{\partial S}{\partial t}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}\right)$$

Por otro lado

$$\nabla^2\Psi = \left(\nabla^2\mathcal{A} - \frac{1}{\hbar^2}\mathcal{A}(\nabla\mathcal{S})^2 + \frac{i}{\hbar}\,\frac{1}{\mathcal{A}}\,\nabla.(\mathcal{A}^2\,\nabla\mathcal{S})\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}\right)$$

Reconocemos el término $\partial\mathcal{S}/\partial t$ en la primera expresión y el término $(\nabla\mathcal{S})^2$ en la segunda. Realizando una adecuada combinación lineal de ambas expresiones vamos a poder recuperar la ecuación de Hamilton - Jacobi más términos adicionales. Escribimos entonces

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\,\Psi - i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \quad = \quad & \left[\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\nabla^2\mathcal{A}}{\mathcal{A}}\right)\right. \\ & \left. - \frac{i\hbar}{2\mathcal{A}^2}\left(\frac{\partial\mathcal{A}^2}{\partial t} + \nabla.(\mathcal{A}^2\,\frac{1}{m}\,\nabla\mathcal{S})\right)\right]\,\Psi\end{aligned}$$

Y hasta aquí podemos llegar con la Mecánica Clásica. Si usamos la ecuación de Hamilton-Jacobi para eliminar los tres primeros sumando del miembro derecho, nos está quedando un pastiche de las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ que no podemos combinar en ninguna tipo de operación que involucre sólo a la función Ψ. Pero demos un salto de imaginación y pensemos en la solución Ψ de la ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\,\Psi - i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0$$

La ecuación anterior sólo da una descomposición absolutamente general y válida de dicha ecuación en sus partes real e imaginaria, y por lo tanto, la ecuación anterior es completamente equivalente a las dos ecuaciones siguientes

$$\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla\mathcal{S})^2 + V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\nabla^2\mathcal{A}}{\mathcal{A}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}^2}{\partial t} + \nabla.(\mathcal{A}^2 \, \frac{1}{m} \, \nabla \mathcal{S}) = 0$$

La primera ecuación es casi parecida a la ecuación de Hamilton - Jacobi, salvo por la aparición de un nuevo término que la relaciona con la segunda ecuación. Y si interpretamos a $\mathbf{v} = \nabla \mathcal{S}/m$ como una velocidad y a $\rho(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}^2(\mathbf{r}, t)$ como una densidad de algún tipo, vemos que esta segunda ecuación tiene la estructura de una ecuación de continuidad $\partial\rho/\partial t + \nabla.(\rho\mathbf{v}) = 0$. Es como si al separar la ecuación anterior para Ψ en sus partes real e imaginaria obtuviésemos las ecuaciones de movimiento y continuidad para una especie de fluido caracterizado por una densidad

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \mathcal{A}^2(\mathbf{r}, t)$$

y un flujo

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Real}\left(\Psi^* \frac{\hbar\nabla}{im} \Psi\right) = \rho(\mathbf{r}, t) \, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

Bueno, llegó la hora de revelar el misterio. La ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r}) \, \Psi - i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0$$

es ni más ni menos que la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica, y Ψ es la función de onda asociada a la partícula cuyo movimiento estamos analizando. En este contexto, la densidad $\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ está relacionada con la probabilidad de encontrar a esa partícula en un dado punto $\mathbf{r}$ del espacio al tiempo t. La constante $\hbar$ que introdujimos con el sólo e inocente propósito de mantener las unidades, ahora pasa a jugar un rol central de la mecánica, siendo una constante universal de la Física en un pie de igualdad con -por ejemplo- la velocidad de la luz. El valor más preciso de esta cantidad ha sido medido por un grupo del National Institute of Standards and Technology NIST (Phys. Rev. Lett, 21 Set 98), obteniendo $h = 2\pi\hbar = 6.62606891 \times 10^{-34}$ Joule.segundo, con una incerteza de 89 partes en 10^9. Es previsible que, así como la velocidad de la luz en el vacío sirve de base para definir la unidad de longitud, en un futuro cercano esta cantidad sirva como referencia para la definición del kilogramo, que es la única unidad del sistema internacional SI que está definida por medio de un artefacto material.

Aunque pasar de la Mecánica Cuántica a la Mecánica Clásica (es decir del mundo microscópico al macroscópico) no es algo tan simple como tomar el límite $\hbar \to 0$ en la ecuación de Schrödinger, es particularmente evidente que la ecuación de Hamilton - Jacobi da la clave de esta transición. Y de allí su tremenda importancia en el desarrollo de la Física.

30.8 Thomas Kuhn y las revoluciones científicas